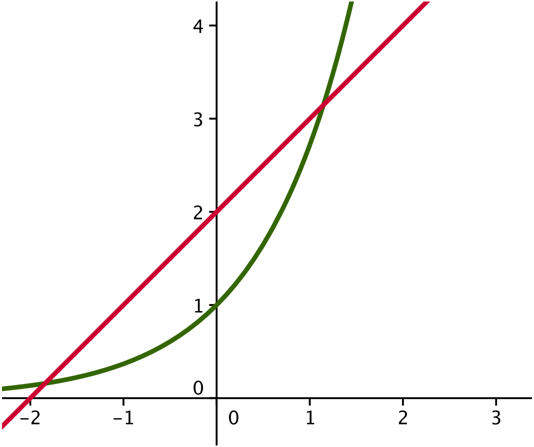
Résolution approchée $f(x) = 0$

Vallon

14 décembre 2014

- Il existe une formule pour résoudre une équation du second degré comme $x^2 - x - 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$
- Cette formule nous donne deux informations
  1. L'existence des solutions
  2. Les valeurs numériques des solutions éventuelles
- Est ce toujours possible ?

- Résoudre $e^x = x + 2$ dans $\mathbb{R}$
- Pas de formule pour cette équation



- On "voit" que la courbe représentative de la fonction exponentielle coupe la droite d'équation $y = x + 2$ en deux points donc on conjecture qu'il y a deux solutions
- On aimerait avoir un argument qui prouve l'existence des solutions

- La résolution de toute équation peut se ramener à la résolution d'une équation du type $f(x) = 0$
- Par exemple résoudre $e^x = x + 2$ dans $\mathbb{R}$ équivaut à $\underbrace{e^x - x - 2}_{f(x)} = 0$

  dans $\mathbb{R}$

Théorème

(admis)
f une fonction continue sur un intervalle J tel qu'il existe a et b dans J avec $f(a).f(b) < 0$ alors il existe au moins une valeur c entre a et b de telle sorte que $f(c) = 0$

Application : f est continue en tant que somme de fonctions continues, et $f(-2) = e^{-2} > 0$, et $f(0) = -1 < 0$ par conséquent d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une valeur c entre -2 et 0 telle que $f(c) = 0$

Théorème

(admis)
f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle J tel qu'il existe a et b dans J avec $f(a).f(b) < 0$ alors il existe une unique valeur c entre a et b de telle sorte que $f(c) = 0$

- $f'(x) = e^x - 1$
- $e^x - 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$
-

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

- D'après le tableau de variations et le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $e^x = x + 2$ dans $\mathbb{R}$ a deux solutions, l'une entre $-\infty$ et 0, l'autre entre 0 et $+\infty$