Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires (Bolzano 1817)

"Lorsqu'on examine de plus près les méthodes de démonstration du théorème suivant :*Il faut qu'il y ait toujours, entre deux valeurs quelconques de la grandeur inconnue qui donnent deux résultats de signes opposés, au moins une racine réelle de l'équation* , il apparaît très vite qu'aucune ne peut être considérée comme suffisante.

1. Dans la méthode de démonstration la plus courante, on s'appuie sur une vérité empruntée à la géométrie : *à savoir que toute ligne continue à courbure simple dont les ordonnées sont d'abord positives, puis négatives (ou inversement) doit nécessairement couper quelque part l'axe des abscisses en un point situé entre ces ordonnées*

   Il n'y a absolument rien à objecter ni contre la justesse ni contre **l'évidence** de ce théorème géométrique . Mais il est tout aussi manifeste qu'il y a là une faute intolérable contre la bonne méthode qui consiste à vouloir déduire les vérités des mathématiques pures ou générales (arithmétique, algèbre et analyse) de considérations qui appartiennent à une partie appliquée seule , à savoir la géométrie...

   En effet, dans la science, les démonstrations ne doivent être nullement être de simples procédés de fabrications d'évidence, mais doivent être plutôt des fondements ; il faut exposer le fondement objectif de la vérité à démontrer :...le fondement objectif d'une vérité valable pour toutes les grandeurs, qu'elles soient ou non dans l'espace, ne peut pas se trouver dans une vérité valable seulement pour les grandeurs qui appartiennent à l'espace..."

2. "Il faut rejeter de même la démonstration que certains ont établie à partir du concept de continuité d'une fonction en y faisant intervenir les concepts du temps et de mouvement :" Si deux fonctions $f(x)$ et $\phi(x)$ disent-ils, varient suivant la loi de continuité, et si pour $x = \alpha$, $f(\alpha) < \phi(\alpha)$, mais pour $x = \beta$, $f(\beta) > \phi(\beta)$ alors il doit y avoir une valeur intermédiaire u entre α et β pour laquelle $f(u) = \phi(u)$. Car si l'on imagine que la grandeur variable x dans ces deux fonctions prend successivement toutes les deux valeurs intermédiaires entre α et β et prend au même instant toujours la même valeur à gauche et à droite : alors au début de cette variation continue de la valeur de x, on a $f(x) < \phi(x)$ et à la fin $f(x) > \phi(x)$. Mais comme les deux fonctions doivent d'abord, grâce à leur continuité, parcourir toutes les valeurs intermédiaires avant de pouvoir atteindre une valeur supérieure x, de même, il faut qu'il y ait un certain instant intermédiaire pour lequel les deux valeurs sont égales ". On rend sensible ceci encore par l'exemple du mouvement de deux corps dont l'un était au début derrière l'autre , l'a devancé à la fin, et doit donc nécessairement avoir une fois passé à côté de lui.

   Les concepts de temps et de mouvement (et celui-ci encore plus) sont tout aussi étrangers aux mathématiques générales que le le concept d'espace, cela ne peut être mis en doute par personne. Toutefois, nous n'aurions rien à objecter si ces deux concepts n'y étaient introduits qu'en tant qu'éclaircissement..., nous sommes loin de tenir les exemples et les applications pour des choses qui nuiraient à la perfection d'un exposé scientifique. Nous n'exigeons fermement que ceci : on ne proposera jamais des exemples en place des démonstrations ; on ne fondera jamais l'essentiel de la déduction sur des expressions du langage employées improprement et sur les représentations secondaires qu'elles portent avec elles ; la déduction ne serait pas valide dès qu'on change l'expression"

Démonstration de Bolzano

1. **Définition de la continuité :** "Une fonction $f(x)$ varie suivant une loi de continuité pour toutes les valeurs de x situées à l'intérieur de certaines bornes : si x est une telle valeur quelconque, la différence $f(x+\omega)-f(x)$ peut être rendue plus petite que toute grandeur donnée, si l'on peut prendre ω aussi petit que l'on voudra"
2. **Théorème :** "Si deux fonctions continues de x , $f(x)$ et $\phi(x)$ ont la propriété que pour $x = \alpha$, $f(\alpha) < \phi(\alpha)$, mais pour $x = \beta$, $f(\beta) > \phi(\beta)$ alors il doit y avoir une valeur intermédiaire u entre α et β pour laquelle $f(u) = \phi(u)$".
3. **Preuve :** " Si $f(\alpha) < \phi(\alpha)$ alors en vertu de la loi de continuité on a également
$$f(\alpha + i) < \phi(\alpha + i)$$
lorsqu'on prend i suffisamment petit.
La propriété d'être plus petite appartient donc à la fonction de i représentée par l'expression $f(\alpha + i)$ pour toutes les valeurs de i qui sont plus petites qu'une certaine valeur. Toutefois, cette propriété ne lui appartient pas pour toutes les valeurs de i sans restriction ; en particulier elle ne lui appartient pas pour un $i = \beta - \alpha$ parce que $f(\beta) > \phi(\beta)$. Or on a le théorème suivant :**aussi souvent qu'une certaine propriété M appartient à toutes les valeurs d'une grandeur variable i qui sont plus petites qu'une certaine valeur donnée, sans appartenir pour autant à toutes les valeurs en général, il existe toujours une valeur maximale u pour laquelle on peut affirmer que tous les i qui sont $< u$ ont la propriété M**. On ne peut pas avoir pour cette valeur même de i :
$$f(\alpha + u) < \phi(\alpha + u)$$
car autrement suivant la loi de continuité on aurait également :
$$f(\alpha + u + \omega) < \phi(\alpha + u + \omega)$$
en prenant ω suffisamment petit. Et il ne serait pas vrai, par conséquent, que u soit la plus grande des valeurs pour lesquelles on a le droit d'affirmer que toutes les valeurs de i inférieures à u rendent :
$$f(\alpha + i) < \phi(\alpha + i)$$
au contraire , $u + \omega$ serait une valeur encore plus grande pour laquelle la même chose est valable. Mais on peut encore moins avoir :
$$f(\alpha + u) > \phi(\alpha + u)$$
sinon on devrait avoir également
$$f(\alpha + u - \omega) > \phi(\alpha + u - \omega)$$
en prenant ω suffisamment petit et il ne serait pas vrai par conséquent que l'on ait $f(\alpha + i) < \phi(\alpha + i)$ pour toutes les valeurs de $i < u$. Il faut donc que :
$$f(\alpha + u) = \phi(\alpha + u)$$

$\mathbb{R}$ et la propriété de la borne supérieure Le théorème utilisé par Bolzano dans sa démonstration est appelé aujourd'hui propriété de la borne supérieure.

Propriété de la borne supérieure Toute partie non vide et majorée de nombre réels admet une borne supérieure

Définition d'un majorant : Soit E un ensemble ordonné et $A \subset E$ est majorée par un élément de M si :

$$\forall x \in A \qquad x \leqslant M$$

Par exemple :

1. Si E est l'ensemble des mots de la langue française ordonné par l'ordre du dictionnaire (ordre lexicographique) et A les mots commençants par la lettre a alors A est majoré par n'importe quel mot commençant par b
2. Si $A = \{x \in \mathbb{Q} \quad | \quad x^2 < 2\}$ est majoré par 2 ou 3 etc...

Définition de la borne supérieure ou du plus petit des majorants : s'il existe $m \in E$, tel que

1. $\forall x \in A \qquad x \leqslant m$
2. Tout nombre strictement inférieur à m ne majore pas A

alors m est unique et est appelée la borne supérieure de A. On note la borne supérieure de A par $\sup A$

Par exemple :

1. Le premier mot commençant par b est le plus petit des majorants de A donc sa borne supérieure
2. On montre que $A = \{x \in \mathbb{Q} \quad | \quad x^2 < 2\}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Plus précisément pour chaque $x \in A$ on peut trouver un $y \in A$ tel que $x < y$
3. Par contre $A = \{x \in \mathbb{Q} \quad | \quad x^2 < 2\}$ placé dans $\mathbb{R}$, a une borne supérieure le nombre irrationnel $\sqrt{2}$

Construction des nombres réels A la fin du dix-neuvième siècle, on a compris que fonder l'analyse passait obligatoirement par la "construction" des nombres réels . A suivre...