Variables aléatoires

EX N°1 q un réel tel que $0 < q < 1$

1. Soit (u_n) définie par $u_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer la limite de (u_n)
2. Soit (v_n) définie par $v_n = \sum_{k=0}^{n} (k+1)q^k$. Montrer que (v_n) est croissante. Que suffit il de montrer pour prouver que (v_n) converge ?
3. Justifier que $\lim_{n \to +\infty} (n+1)q^{\frac{n}{2}} = 0$
4. En déduire qu'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(n+1)q^n \leqslant Mq^{\frac{n}{2}}$
5. En déduire que (v_n) converge vers un nombre l
6. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_n - qv_{n-1} = u_n$
7. En déduire l

EX N°2

Soit (w_n) définie par $w_n = \sum_{k=0}^{n} kq^k$

1. Montrer que $v_n = w_n + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que (w_n) converge et calculer sa limite

EX N°3

Soit (r_n) définie par $r_n = \sum_{k=0}^{n} (k+2)(k+1)q^k$

1. En adaptant l'exercice 1 montrer que (r_n) converge vers un nombre l
2. Adapter la question 1.6 que vaut $r_n - qr_{n-1}$?
3. En déduire l
4. En déduire la limite de la suite (s_n) définie par $s_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 q^k$

EX N°4

Soit f définie sur $]-1;1[$ par $f_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n$. On a montré précédemment que pour tout $x \in]-1;1[$ on a $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = g(x)$ avec $g(x) = \frac{1}{1-x}$

1. Vérifier que l'on a montré aussi que $\lim_{n \to +\infty} f'_n(x) = g'(x)$
2. A-t-on montré que si $n \to \infty$ alors $f''_n(x) \to g''(x)$?

EX N°5

Nous allons utiliser les résultats précédents pour le calcul de l'espérance de la variable aléatoire vue en cours

Soit X la variable aléatoire dont les valeurs infinies est la suite $(2n+1)$ avec $n \geqslant 1$ et dont la loi de probabilité est la suite géométrique de premier terme $\frac{1}{4}$ et de raison $\frac{3}{4}$

1. Vérifier que l'on a bien définie une loi de probabilité en vérifiant que la somme des termes consécutifs de la suite géométrique **converge vers** 1

2. $E(X)$ est défini comme la limite de la suite (E_n) définie par

$$E_n = \sum_{k=1}^{n}(2k+1)\frac{1}{4}(\frac{3}{4})^{k-1}$$

Vérifier que $E_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1} k(\frac{3}{4})^{k-1} + \frac{1}{4}\sum_{k=1} k(\frac{3}{4})^{k-1}$

3. En utilisant les exercices précédents en déduire que $E(X) = 9$. Ce qui explique les résultats du TP (voir TP marche aléatoire)
4. On rappelle que la variance est définie par $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ où $E(X^2)$est la limite de la suite (C_n)
   définie par $C_n = \sum_{k=1}^{n}(2k+1)^2\frac{1}{4}(\frac{3}{4})^{k-1}$
   Calculer la limite de (C_n)

EX N°6

Propriétés de $E(X)$

Une variable aléatoire discrète S est une fonction de l'univers Ω dans $\mathbb{R}$ $S : \Omega \to \mathbb{R}$, dont les valeurs forment une suite de nombres réels

La probabilité que S ait pour valeur k est définie par

$P(S = k) = P(\{\omega \in \Omega : S(\omega) = k\})$

1. On définit l'espérance de S par $E(S) = \sum_{k \in S(\Omega)} kP(S = k)$
   Montrer que $E(S) = \sum_{\omega \in \Omega} S(\omega)P(\omega)$
   (Ecrire $P(S = k) = \sum_{S(\omega)=k} P(\omega)$ puis distribuer)
2. Si T est une autre variable aléatoire définie sur Ω alors on définit $S + T$ par $S + T(\omega) = S(\omega) + T(\omega)$
   Montrer que $E(S + T) = E(S) + E(T)$ et $E(\alpha S) = \alpha E(S)$
3. Application :
   (a) Montrer que $E(E(X)) = E(X)$
   (Remarque : la variable notée $E(X)$ est la variable aléatoire qui à tout ω associe la constante $E(X)$)
   (b) Montrer que $E(X - E(X)) = 0$
   (c) Montrer que $E((X-E(X))^2) = E(X^2)-E(X)^2$. En déduire $E(X^2) \geqslant E(X)^2$
   (d) Montrer que $E((X - E(X))^2) = E((X - E(X))(X + E(X)))$
   (e) Soit X une variable aléatoire telle que $X = \sum_{k=1}^{n} B_k$ telle que $E(B_k) = p$ pour tout k en déduire $E(X) = np$

EX N°7

La relation d'ordre pour les variables aléatoires est définie par :

$X \leqslant Y \iff X(\omega) \leqslant Y(\omega)$ <u>pour tout</u> $\omega \in \Omega$

1. Montrer que si $X \leqslant Y$ alors $E(X) \leqslant E(Y)$
2. Que pensez vous de la réciproque ?

EX N°8

Soit X une variable aléatoire définit sur Ω

On note $1_{[a;+\infty[}(X)$ la variable définie à partir de X par :

$1_{[a;+\infty[}(X)(\omega) = 1$ si $X(\omega) \geqslant a$, 0 sinon

Vérifier que $1_{[a;+\infty[}(X)$ suit une loi de Bernouilli

En déduire que $E(1_{[a;+\infty[}(X)) = P(X \geqslant a)$

EX N°9

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et $a > 0$

1. Justifier que pour tout $a > 0$ on a $|X| \geqslant a1_{[a;+\infty[}(|X|)$
   (Partionner l'univers en deux : un évènement A contenant les ω où $|X(\omega)| \geqslant a$ et le complémentaire $\overline{A}$, il est possible que $A = \phi$)
2. En déduire $X^2 \geqslant a^2 1_{[a;+\infty[}(|X|)$
3. En déduire $P(|X| \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(X^2)}{a^2}$
4. En déduire l'inégalité de Bienaymé-Chebyschev : $P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \dfrac{V(X)}{a^2}$
5. En déduire $P(|X - E(X)| \geqslant k\sigma(X)) \leqslant \dfrac{1}{k^2}$
   Application numérique : k = 1, 2 et 3. Interprétation

EX N°10

Soit $a > 0$ et f définie sur $[1; 4]$ par $f(t) = at$

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité sur $[1; 4]$
2. Soit X une variable aléatoire ayant f pour densité de probabilité
   Calculer $P(X > 3)$

EX N°11

Soit X une variable aléatoire continue suivant une loi uniforme sur $[a; b]$

On rappelle que la fonction de densité de probabilité est alors $f(x) = \dfrac{1_{[a;b]}(x)}{b - a}$

1. Montrer que $E(X) = \int\limits_a^b xf(x)\mathrm{d}x = \dfrac{a + b}{2}$.Interprétation
2. On définit $E(X^2)$ par $E(X^2) = \int\limits_a^b x^2 f(x)\mathrm{d}x$. Vérifier que $V(X) = \dfrac{(a - b)^2}{12}$ Comparer $\sigma(X)$ à $\dfrac{b - a}{2}$

EX N°12

X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0;4]$

1. Calculer $P(X<1)$ et $P(X \geqslant 3)$
2. Calculer $P_{(X>1)}(X<2)$
3. Donner l'espérance de X

EX N°13

Soit λ un nombre réel et f définie sur $I=[-1;1]$ par $f(x)=\lambda(1-x)(1+x)$

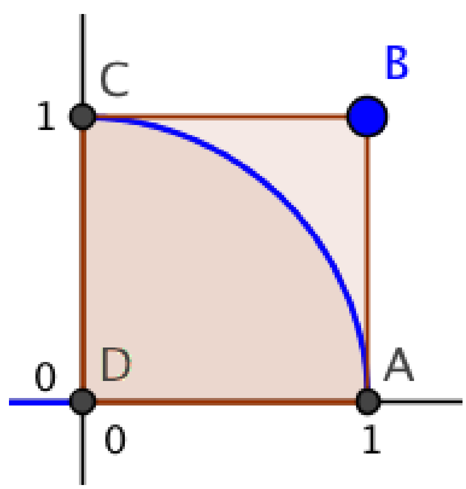
1. Déterminer λ pour que f soit une densité de probabilité sur I
2. Soit X une variable aléatoire de densité f
   (a) Calculer $P(X \geqslant 0,4)$
   (b) Calculer $P(|X| \leqslant 0,3)$
   (c) Calculer $E(X)$

EX N°14

Deux amis se donnent rendez vous à la gare entre 10 h et 10 h 15. Michel décide d'arriver à 10 h 10 alors qu' Etienne arrive au hasard entre 10h et 10 h 15

1. Modéliser l'arrivée d'Etienne par une variable aléatoire ayant une loi "simple"
2. Quelle est la probabilité que Michel n'attende pas Etienne ?
3. Quelle est la probabilité que Michel attende Etienne 5 minutes ?

EX N°15(Calcul de π par la méthode de Monte-Carlo)



1. Justifier que $\pi = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ (Couper le cercle de centre (0 ;0) et de rayon 1 en 4 , quelle est l'équation de l'arc de cercle sur [0 ;1] ?)
2. On va évaluer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ avec un algorithme "probabiliste" appelé algorithme de Monte-Carlo :Imaginons que le carré ABCD soit une cible carrée , on lance un grand nombre n de fléchettes "au hasard " et de manière uniforme et on compte

le nombre de fois m où la fléchette soit à l'intérieur de l'arc (AC), pour n "assez grand" alors

$$\frac{m}{n} \simeq \frac{\pi}{4}$$

Ecrire l'algorithme (x = uniforme(0,1) signifie que l'on engendre au hasard et de manière uniforme un réel appartenant à [0 ;1])

3. Faire un programme sur votre calculatrice ou en Python
4. On va construire un autre algorithme probabiliste : On génère un grand nombre n de réels x_k "au hasard " et de manière uniforme dans $[0;1]$ et on calcule la moyenne des images $f(x_k)$ c'est à dire $\overline{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{f(x_k)}{n}$ (avec f définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$). Quel est le rapport avec $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$?
5. Ecrire l'algorithme
6. Ecrire un programme . Comparer les programmes

EX N°16(Méthode de Horner)

Soit $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$

Pour calculer $P(a)$ on fait $P(a) = a_0 + a(a_1 + a(a_2 + ... + a(a_{n-1} + aa_n)...))$

D'où l'algorithme :

S = 0

Pour i = n jusqu'à 0

S = a_i + aS

Fin

Afficher S

1. Combien de fois est exécutée la boucle ?
2. Dans l'instruction $S = a_i + aS$ on s'intéresse à la multiplication $a \times S$. Combien de fois a lieu cette multiplication ?On définit ici $T_1(n)$ comme étant le nombre le nombre de multiplications aS exécutées
3. Ecrire l'algorithme naïf du calcul de $P(a)$
4. On définit $T_2(n)$ comme le nombre de multiplications ayant lieu dans cet algorithme.
   Vérifier que $T_2(n) = 1 + 2 + ... + n$. Simplifier $T_2(n)$
5. Comparer T_1 et T_2 asymptotiquement

EX N°17

Soit S la variable aléatoire égale à la somme de n dés.

1. Décomposer S en une somme de variables aléatoires $X_1 + X_2 + ... + X_n$ suivant chacune une loi de Bernouilli
2. En déduire $E(S)$

EX N°18

Problème du vestiaire à chapeaux : Chaque client parmi n au total donne son chapeau à un employé d'un restaurant. Cet employé redonne les chapeaux aux clients dans un ordre aléatoire. Quel est le nombre moyen de clients qui récupéreront leurs chapeaux ? (Introduire une variable aléatoire N égale au nombre de chapeaux récupérés, décomposer N en une somme de variables aléatoires suivant une loi de Bernouilli etc...)

EX N°19

Soit x_1,...,x_n une suite finie de n nombres distincts . On dit que la paire (i, j) est une inversion si $i < j$ et $x_i > x_j$

1. Quels sont les 3 inversions de $(1, 3, 4, 2, 7, 5)$?
2. Quel est le nombre moyen d'inversions pour une suite de n nombres ?

EX N°19(Problème de l'embauche)

Ω est l'ensemble des permutations sur les n premiers entiers $\{1, 2, 3, ..., n\}$ Il s'agit de montrer en utilisant la formule des probabilités totales que la probabilité du candidat i d'être embauché est $p_i = \dfrac{1}{i}$

1. Montrer que $p_n = \dfrac{1}{n}$
2. Vérifier que les évènements A_i" Tous les candidats évalués avant le candidat i ont un rang plus petit que celui de i" et $\overline{A_i}$ forment une partition de l'univers Ω
3. En déduire que $P($ i est embauché$) = P(A_i) \times P_{A_i}($ i est embauché$) + P(\overline{A_i}) \times P_{\overline{A_i}}($ i est embauché$)$
4. Pourquoi $P_{A_i}($ i est embauché$) = 1$?
5. Pourquoi $P_{A_i}($ i est embauché$) = 0$?
6. Montrer que $P(A_i) = \dfrac{1}{i}$ en identifiant toutes les permutations $(x_1, x_2, ..., x_i, ...x_n)$ de Ω aux permutations $(x_1, x_2, ..., x_i)$

EX N°20(BAC 2013)

Un boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement,en jours, de cette balance est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ

1. On sait que la probabilité que la balance éléctronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de λ arrondie au millième. Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0,003$
2. Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?
3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est ce vrai ?

EX N°17

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ. (t_n) une suite arithmétique de premier terme $a \geqslant 0$ et de raison $r > 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = P(X > t_n)$

1. Démontrer que la suite (P_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison
2. Etudier la variation et la limite de la suite (P_n)

EX N°18

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ

Démontrer que pour tout $h > 0$ et tout $t > 0$ on a $P_{(X \geqslant t)}(X \geqslant t + h) = P(X \geqslant h)$

(système sans mémoire)

EX N°19

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ

1. Montrer que $P(X > E(X))$ est indépendante de λ
2. Calculer le maximum p_λ de la fonction $t \to P(t \leqslant X \leqslant 2t)$. La valeur de t où le maximum est atteint est appelée demi-vie

EX N°20

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires suivant une loi binomiale de paramètres $(n; \dfrac{\lambda}{n})$

$\lambda > 0$

1. Que vaut $\lim n \to \infty P(X_n = k)$?