Limite d'une suite: Théorèmes

Vallon

21 septembre 2014

Théorème

Si une suite a une limite alors cette limite est unique

Démonstration.

Nous allons faire une démonstration par l'absurde. Supposons q'une suite (u_n) converge vers deux limites l_1 et l_2 distantes de $d = |l_1 - l_2|$. Prenons deux intervalles ouverts centrés sur l_1 et l_2 de rayon $\frac{d}{4}$. A partir d'un certain rang tous les termes de la suite sont à la fois dans les deux intervalles qui pourtant sont disjoints. Ce qui est absurde

$\square$

Théorème

Si $-1 < q < 1$ *alors* (q^n) *converge vers 0*

Théorème

Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers l' alors $(u_n) + (v_n)$ converge vers $l + l'$

Démonstration.

Prenons un intervalle ouvert centré sur $l + l'$ de rayon r quelconque . De ce rayon r nous en déduisons deux intervalles de rayon $\frac{r}{2}$, l'un centré sur l l'autre centré sur l' . Ces intervalles par définition de la convergence déterminent un rang N pour (u_n) et N' pour (v_n) tel que
Pour tout n entier si $n \geqslant N$ alors $l - \frac{r}{2} \leqslant u_n \leqslant l + \frac{r}{2}$ (encadrement de (u_n))
Pour tout n entier si $n \geqslant N'$ alors $l' - \frac{r}{2} \leqslant v_n \leqslant l' + \frac{r}{2}$ (encadrement de (v_n))
On ajoute les deux lignes :
Pour tout n entier si $n \geqslant$ max(N,N') alors $l + l' - r \leqslant u_n + v_n \leqslant l + l' + r$ $\square$

Théorème

Si (u_n) *converge vers* l *et* (v_n) *converge vers* l' *alors* $(u_n) \times (v_n)$ *converge vers* $l \times l'$

Démonstration.

Exercice $\square$

Théorème

Si (u_n) *converge vers* l *et* $l \neq 0$ *alors* $(\frac{1}{u_n})$ *converge vers* $\frac{1}{l}$

Démonstration.

Exercice $\square$

Théorème

(Encadrement) Si à partir d'un certain rang $w_n \leqslant u_n \leqslant v_n$ et si w_n et v_n convergent vers l alors u_n converge aussi vers l

Démonstration.

Exercice □

Théorème

(admis) Toute suite croissante (respectivement décroissante) et majorée (respectivement minorée) converge