Suites récurrentes

Vallon

5 septembre 2014

1. Exemples de suites récurrentes

- Soit la suite des nombres pairs
- 0,2,4,6,.....
- on peut la décrire avec une suite (u_n) définie par une formule $u_n = 2n$
- Où n est un nombre entier
- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers
- Une suite est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$
- Ou de manière récurrente $u_n = u_{n-1} + 2$ avec $u_0 = 0$
- Le terme général est défini à partir d'un ou plusieurs de ces prédécesseurs

Suites arithmétiques

Définition

(définition récurrente)Une suite est dite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que pour tout n entier $u_n = u_{n-1} + r$
r est appelé la raison de la suite

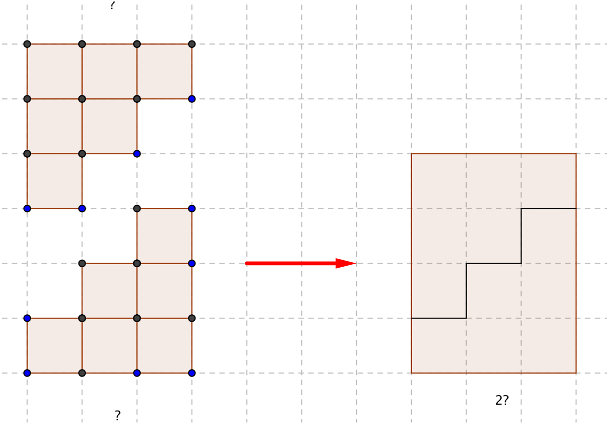
Exemple : La suite des nombres pairs est arithmétique de raison 2

Théorème

(formule) Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors u_n peut s'exprimer par une formule sous la forme $u_n = nr + u_0$

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$



Suites géométriques

Définition

(définition récurrente)Une suite est dite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que pour tout n entier $u_n = u_{n-1} \times q$
q est appelé la raison de la suite

Exemple : La suite des puissances de 2 est géométrique de raison 2

Théorème

(formule) Si (u_n) est une suite géométrique de raison r alors u_n peut s'exprimer par une formule sous la forme $u_n = q^n \times u_0$

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

$$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

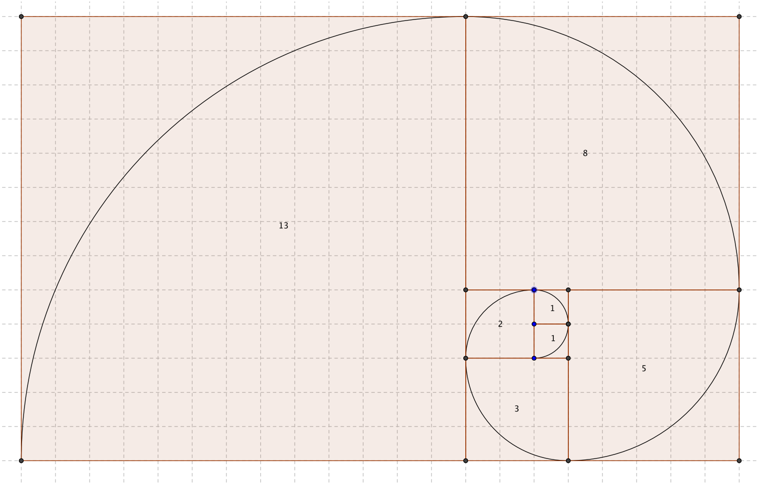
La suite de Fibonnacci

Leonardo Fibonnacci est un mathématicien italien du $XIII^e$ siècle

- Définie de manière récurrente par $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ avec $F_0 = F_1 = 1$
- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946,...
- Soit $R_n = \dfrac{F_n}{F_{n-1}}$. On montre que (R_n) tend vers $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or
- 1.6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486...est une valeur approchée de ϕ
  Source : https ://www.wolframalpha.com/
- On note $\bar{\phi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

  On démontrera la formule suivante : $F_n = \dfrac{\phi^n - \bar{\phi}^n}{\sqrt{5}}$

Spirale de Fibonnacci



La suite de Sylvester

James Sylvester est un mathématicien anglais du XIX^e siècle

- (définition récurrente) $u_n = u_{n-1} \times (u_{n-1} - 1) + 1$ avec $u_0 = 2$
- 2, 3, 7, 43, 1807, 3263443, 10650056950807,
  113423713055421844361000443,
  12864938683278671740537145998360961546653259485195807,
  1655066473245199641984681954444391800175131527063774978418513
  887665358686395724068089119881317376451854 43, ...

Source : https ://www.wolframalpha.com/

La suite de Sylvester

Théorème

A partir du terme égal à 7, la somme réduite *des chiffres de (u_n) est* toujours *égale à 7*

- $1 + 8 + 0 + 7 = 16- > 1 + 6 = 7$
- $3 + 2 + 6 + 3 + 4 + 4 + 3 = 25- > 2 + 5 = 7$

Comment démontrer une telle propriété ?