Successions d'épreuves indépendantes

1 Jeu du Chevalier de Méré

On lance 4 fois un dé à six faces équilibré. Vous gagnez contre la banque du casino si aucun six n'apparaît. Autrement dit la banque gagne si au moins un six apparaît

1. Quelle est la probabilité de gagner une partie pour un joueur ?
2. Si un joueur joue n parties à la suite :
   (a) Quel est le nombre de parties k qu'il peut gagner le plus probablement ?
   (b) Quel est le nombre moyen de parties qu'il peut espérer gagner ?

1.1 Simulation

Programmer en Python une fonction :

1. `laBanqueGagne()` qui retourne vraie si la banque gagne une partie
2. `frequenceGainBanque(nbParties)` qui calcule la fréquence de gain de la banque pour un nombre de parties successives `nbParties`

1.2 Modélisation du Jeu

Première modélisation

On décrit l'univers $\Omega = [\![1;6]\!]^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|\ x_i \in [\![1;6]\!]\}$

On note A l'évènement "faire au moins un six" et $\overline{A}$ l'évènement contraire "ne pas faire de six"

Donc $P(\overline{A}) = \dfrac{5^4}{6^4}$ et $P(A) = 1 - \dfrac{5^4}{6^4} \simeq 0,517$

On observe que les fréquences obtenues lors du TP sont "proches" de la probabilité, ceci sera traité plus loin dans le cours

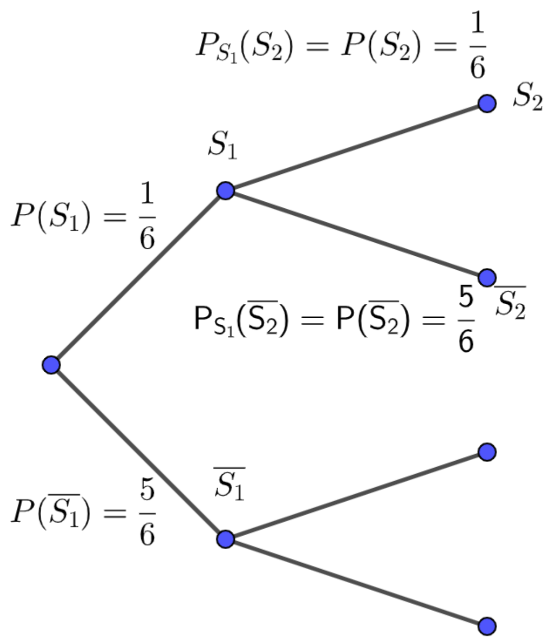
Deuxième modélisation

Il s'agit de décrire mathématiquement "une succession d'épreuves indépendantes"

Comment ?

Regardons d'abord le cas où on lance deux fois le dé

On note S_i l'évènement obtenir six au i-ème lancer pour $i = 1$ ou 2, et on construit l'arbre pondéré ci-dessous



L'évènement S_2 pourrait être conditionné par l'évènement S_1, il est légitime de poser comme hypothèse pour simplifier le modèle que les évènements S_1 et S_2 sont **indépendants** et donc

$P_{S_1}(S_2) = P(S_2) = \frac{1}{6}$

Dans ce cas $P(\overline{S_1} \cap \overline{S_2}) = P(\overline{S_1}) \times P_{\overline{S_1}}(\overline{S_2}) = P(\overline{S_1}) \times P(\overline{S_2}) = (\frac{5}{6})^2$

Si on lance 4 fois le dé :

$P(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3} \cap \overline{S_4}) = P(\overline{S_1}) \times P(\overline{S_2}) \times P(\overline{S_3}) \times P(\overline{S_4}) = (\frac{5}{6})^4$

2 Généralisation : Schéma de Bernouilli

1. On nomme **épreuve de Bernouilli** une expérience aléatoire à deux issues, par exemple faire six ou ne pas faire six , une ampoule fonctionne ou pas etc....
2. On appelle **succès** l'une des issues
3. On nomme **schéma de Bernouilli** une succession de n épreuves de Bernouilli de même nature et **indépendantes**
4. On veut calculer la loi du nombre de succès N c'est à dire être capable de calculer la probabilité $P(N = k)$ d'obtenir k succès sur les n répétitions avec $0 \leqslant k \leqslant n$

Regardons le cas $n = 4$ et $k = 2$

Dans l'arbre pondéré les évènements correspondants à cette situation sont les 6 évènements incompatibles :

$S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3} \cap \overline{S_4}$ puis $S_1 \cap \overline{S_2} \cap S_3 \cap \overline{S_4}$ puis $S_1 \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3} \cap S_4$ puis $\overline{S_1} \cap S_2 \cap S_3 \cap \overline{S_4}$

Chacun de ces évènements a une probabilité $(\frac{1}{6})^2 \times (\frac{5}{6})^2$

En tout la probabilité d'avoir 2 succès pour 4 parties est :

$6 \times (\frac{1}{6})^2 \times (\frac{5}{6})^2$

3 Dénombrement

3.1 Tiercés et arrangements

Problème

10 chevaux numérotés de 1 à 10 au départ d'une course

Combien y-a-t-il de classements de 3 chevaux à l'arrivée de la course (premier, deuxième et troisième) ?

Réponse

Il y a 10 choix possibles pour placer le premier cheval, une fois le premier cheval placé, il reste 9 possibilités pour placer le deuxième et 8 pour le troisième

Il y a donc en tout $10 \times 9 \times 8 = 720$ tiercés possibles

Définition 1 *Etant donné un ensemble* $E = \{1, 2, .., n\}$

Un arrangement de k *éléments de* E*, avec* $1 \leqslant k \leqslant n$ *est un classement de* k *éléments de* E

Théorème 1 *Le nombre d'arrangements de* k *éléments parmi* n *éléments est égal à :*

$$\underbrace{n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1)}_{k \ facteurs}$$

Exemple

$n = 10$ et $k = 3$ on retrouve $10 \times 9 \times 8 = 720$ tiercés possibles

Définition 2 *Etant donné un ensemble* $E = \{1, 2, .., n\}$

Un arrangement de n *éléments de* E *est appelée une permutation*

Théorème 2 *Le nombre de permutations de* n *éléments est égal à :*

$$\underbrace{n \times (n-1) \times ... \times (1)}_{n \ facteurs}$$

On note ce nombre $n!$ *(lire : factorielle* n*)*

Exemple

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4 \times 3! = 24$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5 \times 4! = 120$

Par convention $0! = 1$

3.2 Tiercés dans le désordre et combinaisons

10 chevaux numérotés de 1 à 10 au départ d'une course

Combien y-a-t-il d'arrivées de 3 chevaux **sans classement** ?

Réponse

On relie ce problème au problème précédent en effet si une arrivée est $\{2, 5, 7\}$ alors les différents arrangements que l'on peut obtenir à partir de cet ensemble sont :

1. $(2, 5, 7)$
2. $(2, 7, 5)$

3. $(5, 2, 7)$
4. $(5, 7, 2)$
5. $(7, 2, 5)$
6. $(7, 5, 2)$

Pour trouver le nombre de parties à 3 éléments parmi les 10 éléments il suffit de diviser les 720 arrangements par $3! = 6$, autrement dit il y a 120 tiercés dans le désordre

Définition 3 *Etant donné un ensemble $E = \{1, 2, .., n\}$*

Une combinaison de k éléments de E, avec $1 \leqslant k \leqslant n$ est une partie de k éléments de E

Théorème 3 *On note $\binom{n}{k}$ le nombre de combinaisons de k éléments parmi n éléments*

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1)}{k!}$$

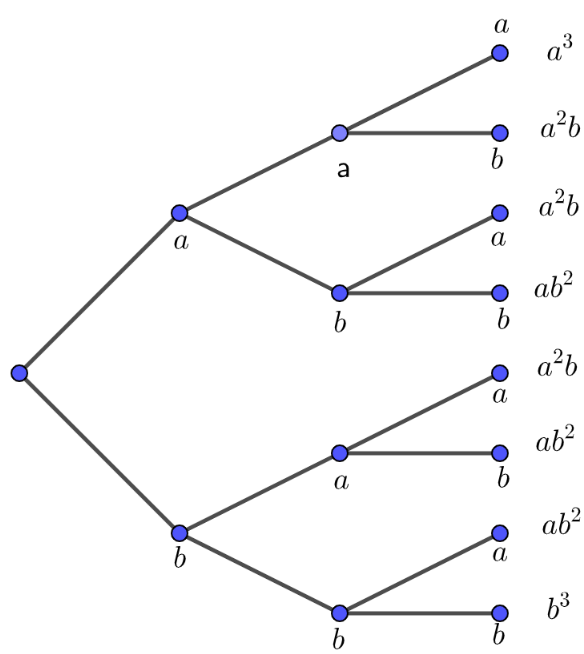
Exemples

$\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Par convention $\binom{n}{0} = 1$

3.3 Coefficient binomiaux et Triangle de Pascal

Théorème 4
1. *Le nombre d'évènements pour k succès est $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ dans un schéma de Bernouilli ayant n répétitions*
2. *La loi $P(N = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$*



On peut développer $(a+b)^3$ en utilisant un arbre à la manière d'un schéma de Bernouilli

Théorème 5 ***Formule de Newton*** $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Théorème 6

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ *pour* $0 \leqslant k \leqslant n$
2. *Calcul des* $\binom{n}{k}$ *par programmation dynamique*
   $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$
   $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
   $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ *pour* $n \geqslant 2$ *et* $k \geqslant 1$
3. $\binom{n}{k} = k\binom{n}{k-1}$ *(Espérance de la loi binomiale)*
4. $2^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}$

4 Loi Binomiale

Théorème 7

1. *La loi* $P(N = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ *pour* $0 \leqslant k \leqslant n$
2. *L'espérance de la loi est égale à* np