

## Résolution approchée d'équations

### EX 1

1. Résoudre l'équation  $E(x) = 0,5$  dans  $\mathbb{R}$
2. Pour tout  $k$  réel discuter des solutions de  $E(x) = k$  suivant les valeurs de  $k$

### EX 2

1. Dessiner un exemple de courbe représentative  $C_f$  d'une fonction  $f$  continue sur  $[0;1]$  à valeurs dans  $[0;1]$ . Est ce que  $C_f$  et le segment d'équation  $y = x$  sur  $[0;1]$  sont toujours sécants ?
2. Etant donnée une fonction continue  $f$  sur  $[0;1]$  à valeurs dans  $[0;1]$ , on définit une fonction  $g$  sur  $[0;1]$  par

$$g(x) = f(x) - x$$

3. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires montrer que l'équation  $g(x) = 0$  a au moins une solution dans  $[0;1]$ . Conclure
4. Soit  $u_n = f(u_{n-1})$  avec  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $(u_n)$  est convergente vers  $l$ , en déduire que  $l$  est solution de  $g(x) = 0$

### EX 3

Démontrer que l'équation admet au moins une solution dans l'intervalle proposé

1.  $x^3 + 4x^2 + 4x = 1$  avec  $I = [0; 1]$
2.  $3x^4 + 8x^3 + 6x^2 = 3$  avec  $I = [0; 1]$
3.  $e^x = x + 2$  avec  $I = [0; 2]$

### EX 4

1. En utilisant votre calculatrice conjecturer sur l'existence de solutions pour l'équation  $x^2 - 8x + 5 = \frac{1}{x}$
2. Justifier la conjecture

### EX 5

Soit  $f(x) = x^3 - 12x$  définie sur  $I = [-3; 3]$

1. Montrer que pour tout  $k \in [-9; 9]$  l'équation  $f(x) = k$  a au moins une solution dans  $I$
2. Par lecture graphique discuter du nombre de solutions de  $f(x) = k$  suivant les valeurs de  $k$

### EX 6

Pour tout  $n$  entier supérieur ou égal à 1 on définit  $f_n$  sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$$

1. Justifier que l'équation  $f_n(x) = 0$  a au moins une solution dans  $[0;1]$
2. Justifier que la fonction  $f_n$  est croissante sur  $[0;1]$
3. En déduire que  $f_n(x) = 0$  a une solution unique sur  $[0;1]$ . On note  $u_n$  cette solution

4. Montrer que  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 0
5. En déduire que  $(u_n)$  converge vers  $l$ . Que vaut  $l$ ?

**EX 7**

La méthode des tangentes pour la résolution de  $f(x) = 0$  est mise en oeuvre par la suite  $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$  avec  $u_0 = a$

1. On cherche la solution positive de  $f(x) = 0$  avec  $f(x) = x^2 - 2$ . Adapter la suite  $(u_n)$  ci-dessus avec la fonction  $f$ . Reconnaissez vous cette suite?
2. Faire un programme pour la méthode des tangentes et calculer à chaque tour de boucle le rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n^2}$ . Qu'observez vous?
3. Comment évolue le rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  pour la méthode de dichotomie où  $u_n = a$  la borne inférieure de l'intervalle?

**EX 8**

Soit  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = xe^x - 1$

1. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
2. Justifier que  $f(x) = 0$  a au moins une solution sur  $[0; +\infty[$
3. Justifier que cette solution est unique (notée  $\alpha$ )
4. Déterminer le signe de  $f$  sur  $[0; +\infty[$
5. Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = (x - 1)(e^x - 1)$   
Etudier le sens de variations de  $g$
6. Montrer que  $g(\alpha) = -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$