

Résolution approchée d'équations

EX 1

1. Résoudre l'équation $E(x) = 0,5$ dans \mathbb{R}
2. Pour tout k réel discuter des solutions de $E(x) = k$ suivant les valeurs de k

EX 2

1. Dessiner un exemple de courbe représentative C_f d'une fonction f continue sur $[0;1]$ à valeurs dans $[0;1]$. Est ce que C_f et le segment d'équation $y = x$ sur $[0;1]$ sont toujours sécants ?
2. Etant donnée une fonction continue f sur $[0;1]$ à valeurs dans $[0;1]$, on définit une fonction g sur $[0;1]$ par

$$g(x) = f(x) - x$$

3. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires montrer que l'équation $g(x) = 0$ a au moins une solution dans $[0;1]$. Conclure
4. Soit $u_n = f(u_{n-1})$ avec f continue sur \mathbb{R} . On suppose que (u_n) est convergente vers l , en déduire que l est solution de $g(x) = 0$

EX 3

Démontrer que l'équation admet au moins une solution dans l'intervalle proposé

1. $x^3 + 4x^2 + 4x = 1$ avec $I = [0; 1]$
2. $3x^4 + 8x^3 + 6x^2 = 3$ avec $I = [0; 1]$
3. $e^x = x + 2$ avec $I = [0; 2]$

EX 4

1. En utilisant votre calculatrice conjecturer sur l'existence de solutions pour l'équation $x^2 - 8x + 5 = \frac{1}{x}$
2. Justifier la conjecture

EX 5

Soit $f(x) = x^3 - 12x$ définie sur $I = [-3; 3]$

1. Montrer que pour tout $k \in [-9; 9]$ l'équation $f(x) = k$ a au moins une solution dans I
2. Par lecture graphique discuter du nombre de solutions de $f(x) = k$ suivant les valeurs de k

EX 6

Pour tout n entier supérieur ou égal à 1 on définit f_n sur \mathbb{R} par

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$$

1. Justifier que l'équation $f_n(x) = 0$ a au moins une solution dans $[0;1]$
2. Justifier que la fonction f_n est croissante sur $[0;1]$
3. En déduire que $f_n(x) = 0$ a une solution unique sur $[0;1]$. On note u_n cette solution

4. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée par 0
5. En déduire que (u_n) converge vers l . Que vaut l ?

EX 7

La méthode des tangentes pour la résolution de $f(x) = 0$ est mise en oeuvre par la suite $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ avec $u_0 = a$

1. On cherche la solution positive de $f(x) = 0$ avec $f(x) = x^2 - 2$. Adapter la suite (u_n) ci-dessus avec la fonction f . Reconnaissez vous cette suite?
2. Faire un programme pour la méthode des tangentes et calculer à chaque tour de boucle le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n^2}$. Qu'observez vous?
3. Comment évolue le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour la méthode de dichotomie où $u_n = a$ la borne inférieure de l'intervalle?

EX 8

Soit f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^x - 1$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.
2. Justifier que $f(x) = 0$ a au moins une solution sur $[0; +\infty[$
3. Justifier que cette solution est unique (notée α)
4. Déterminer le signe de f sur $[0; +\infty[$
5. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = (x - 1)(e^x - 1)$
Etudier le sens de variations de g
6. Montrer que $g(\alpha) = -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$