Résolution approchée d'équations

1 Résolution exacte vs approchée

Problème Un cylindre a pour base un disque de rayon 1dm et contient de l'eau sur une hauteur de 0,5 dm. On plonge dans ce cylindre une bille de diamètre d (en dm). Quel est le diamètre d de la bille pour lequel le niveau de l'eau est tangent à la bille ?

Démontrer que $0 < d < 2$ et $d^3 - 6d + 3 = 0$

Comment résoudre l'équation précédente ? Existe-il une méthode exacte algébrique pour résoudre cette équation ?

Et même s'il existe une méthode exacte pour un problème concret une méthode approchée ne peut-elle pas suffire surtout si elle est efficace ?

2 Continuité d'une fonction

Définition 1 *f continue en a si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Exemples

1. f définie par $f(x) = x^2$ est continue en 1
2. La fonction inverse n'est pas continue en 0 car $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \neq \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
3. La fonction partie entière E définie par : Tout réel x est dans un intervalle $[n; n+1[$ unique où n est entier, $E(x) = n$
   E n'est pas continue en 1 car $\lim\limits_{x \to 1^+} E(x) = 1 \neq \lim\limits_{x \to 1^-} E(x) = 0$

Intuitivement pour une première approche f est continue en a si la courbe représentative C_f n'a pas de "coupure" en a

Définition 2 *f continue sur un intervalle ouvert I si f est continue en tout point a de I*

Exemples

1. La fonction carré est continue sur $\mathbb{R}$
2. La fonction inverse est continue sur $]0; +\infty[$
3. La fonction partie entière est continue sur tout intervalle $]n; n+1[$ où n est entier

Mais comment savoir sans regarder la courbe représentative d'une fonction que celle ci est continue sur un intervalle ?

Il se trouve que la plupart des fonctions étudiées au Lycée sont dérivables sur tout un intervalle

Théorème 1 *(admis)*

1. *Si f dérivable en a alors f est continue en a*
2. *Si f dérivable sur un intervalle ouvert I alors f est continue sur I*

Attention ! la réciproque est fausse (donner un contre-exemple de fonction non dérivable en 0 mais continue en 0)

3 Le théorème des valeurs intermédiaires et l'algorithme de dichotomie

Il se trouve qu'il existe une méthode algébrique pour résoudre
$0 < d < 2$ et $d^3 - 6d + 3 = 0$

Cependant on peut prouver (Théorie des groupes) qu'il n'existe pas de méthode algébrique pour résoudre l'équation générale $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$ attention cela ne veut pas dire que l'on ne peut pas résoudre une en particulier comme $x^5 - 1 = 0$ qui a une solution évidente $x = 1$ et puis rien d'autre

Par conséquent on va développer une méthode approchée basée sur les propriétés de f définie par $f(d) = d^3 - 6d + 3$

A bien réfléchir la méthode du Δ pour résoudre l'équation de degré 2 sert deux objectifs :

1. prouver qu'il existe bien une solution ou pas
2. S'il en existe au moins une la calculer

Nous allons procéder de la même manière :

1. Un théorème (Le théorème des valeurs intermédiaires) prouvera qu'il existe bien une solution
2. Un algorithme (algorithme de dichotomie) calculera une valeur approchée de la solution avec une précision donnée au départ

Théorème 2 *(admis)*

1. *Si f est continue sur un intervalle ouvert I*
2. *S'il existe a et b dans I tel que $f(a)f(b) < 0$ (changement de signe)*

*Alors l'équation $f(x) = 0$ admet **au moins** une solution dans $]a, b[$*

On utilise surtout le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3 *(admis)*

1. *Si f est continue sur un intervalle ouvert I*
2. *S'il existe a et b dans I tel que $f(a)f(b) < 0$ (changement de signe)*
3. *Si f est **monotone** sur I*

*Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution **unique** dans $]a, b[$*

Exemple

1. f définie par $f(d) = d^3 - 6d + 3$ est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$
2. $f(0) = 3 > 0$ et $f(1) = -2 < 0$
3. $f'd) = 3d^2 - 6 = 3(d^2 - 2) = 3(d - \sqrt{2})(d + \sqrt{2}) < 0$ sur $[0, 1]$ donc f est décroissante sur $[0, 1]$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation admet une solution unique sur $[0,1]$

L'algorithme de dichotomie est basée sur l'idée de **conserver** le changement de signe en divisant l'intervalle en deux sur le même principe que le jeu "Devine un nombre"

Algorithme 1 : algorithme de dichotomie)

`dicho` (f,a,b,precision)
Données : une fonction f,un intervalle [a,b], une precision
Résultat : une valeur approchée de la solution f(x) = 0

```
début
    tant que b-a > precision faire
        //on divise l'intervalle en 2
        m ← (a + b)/2
        si f(a)f(m) < 0 alors
            //le chgt de signe est sur [a,m]
            b ← m
        sinon
            //le chgt de signe est sur [m,b]
            a ← m
        fin
    fin
    retourner a
fin
```

En Python cela donne (voir TP pour plusieurs exemples)

```
#on définit ici la fonction
def f(x):
    return x**3-6x+3

def dicho(f,a,b,precision):
    while b -  a > precision:
        m = (a+b)/2
        if f(a)*f(m) < 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return a

#Exécution
print(dicho(f,0,1,10**(-6)) )
```

Exemples

1. precision $= 10^{-6}$ on obtient $a = 0.5239763259887695$
2. precision $= 10^{-10}$ on obtient $a = 0.5239763970603235$

4 Résolution approchée d'une équation différentielle. Méthode d'Euler

Etudions la méthode d'Euler sur un cas particulier

$y'(x) = y(x)$ et $y(0) = 1$

La méthode d'Euler est basée sur l'idée que

$y(a+h) \simeq y(a) + hy'(a)$ si h "petit"

Au démarrage en prenant $h = 0,01$ dans ce cas $y(0,01) \simeq y(0) + 0,01y'(0)$ or $y'(0) = y(0) = 1$

Donc $y(0,01) \simeq y(0) + 0,01 = 1,01$

Réitérons le processus même si cette dernière valeur n'est qu'une valeur approchée

$y(0,01+0,01) \simeq y(0,01) + 0,01y'(0,01)$ or $y'(0,01) = y(0,01) = 1,01$

Donc $y(0,02) \simeq 1,01 + 0,01 \times 1,01 = 1,0201$

Exercice

Trouver une valeur approchée de $y(0,03)$

On peut programmer ce calcul en Python avec des listes

```python
from math import exp

#exponentielle
def f(a,b):
    return b

def euler(f,x0,y0,pas,n):
    x = [pas*i + x0 for i in range(n)]
    y = [y0]
    for i in range(n):
        pente = f(x[i],y[i])
        y.append(y[i] + pente*pas)
    return y

#---------------main----------------
print(euler(f,0,1,0.01,10))
print([exp(i*0.01) for i in range(11)])
```

En répétant 10 fois le calcul on obtient pour l'exponentielle les valeurs approchées suivantes :

```
[1, 1.01, 1.0201, 1.030301, 1.0406040099999998, 1.0510100500999997,
1.0615201506009997, 1.0721353521070096, 1.0828567056280798, 1.093685
2726843607, 1.1046221254112043]
[1.0, 1.010050167084168, 1.0202013400267558, 1.030454533953517, 1.04
08107741923882, 1.0512710963760241, 1.0618365465453596, 1.0725081812
542165, 1.0832870676749586, 1.0941742837052104, 1.1051709180756477]
```