Suites - Récurrence

EX N°1

Montrer par récurrence les propositions suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$
2. $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout $n \geqslant 1$
3. $\sum_{k=1}^{k=n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$ pour tout $n \geqslant 1$
4. $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$
5. Pour tout $a > 0$ et tout n entier $(1+a)^n \geqslant 1 + na$
6. la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{u_{n-1} + 1}$ avec $u_0 = 1$ est croissante
7. la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{u_{n-1} + 2}$ avec $u_0 = 1$ est majorée par 2
8. Pour tout $n \geqslant 1$ on a $n! \geqslant 2^{n-1}$
9. Pour tout n entier $4^n + 5$ est un multiple de 3
10. Soit f la fonction définie sur R^* par $f(x) = \frac{1}{x}$.
    (a) Calculer f' la fonction dérivée de f
    (b) Calculer f'' la fonction dérivée de f'
    (c) Calculer f''' la fonction dérivée de f''
    (d) Conjecturer une formule pour $f^{(n)}$ la fonction dérivée nième de f et prouver la par récurrence

EX N°2

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8$

1. Calculer u_1,u_2, u_3 et u_4
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n
3. Démontrer cette conjecture par récurrence

EX N°3

1. Quelle différence y-a-t-il entre un axiome et un théorème ?
2. Dit on la même chose en affirmant
    (a) Pour tout $k \geqslant i$, si P_k est vraie alors P_{k+1} est vraie
    (b) Si pour tout $k \geqslant i$ P_k est vraie alors P_{k+1} est vraie

EX N°4

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ (suite arithmético-géométrique)

1. Tracer à la main la droite d'équation $y = x$ puis la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ puis placer les points A_0, A_1 et A_2 de coordonnées respectives $(u_0, 0)$, $(u_1, 0)$ puis $(u_2, 0)$
2. Que peut on conjecturer à propos de la monotonie de (u_n)
3. Prouver votre conjecture par récurrence (de deux manières différentes)
4. Prouver par récurrence que (u_n) est minorée par 2

EX N°5

Soit f la fonction définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 1}$ (fonction homographique)

1. Vérifier que pour tout $x \in [0; 2] f(x) = 2 - \dfrac{1}{x + 1}$ (forme canonique de f)
2. Soit (u_n) et $v_n)$ définies par récurrence :
   $u_0 = 1$ et $u_n = f(u_{n-1})$
   $v_0 = 2$ et $v_n = f(v_{n-1})$
3. Justifier que f est croissante sur $[0; 2]$
4. En déduire le tableau de variations de f sur $[0; 2]$ en déduire que si $x \in [1; 2]$ alors $f(x) \in [1; 2]$
5. Prouver par récurrence que (u_n) est croissante et majorée par 2
6. Prouver par récurrence que (v_n) est décroissante et minorée par 1

EX N°6

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$

1. Calculer u_1,u_2. Que peut on conjecturer à propos de la monotonie de la suite ?
2. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, Etudier les variations de f sur $]0; +\infty[$
3. Montrer que si $x \in [\sqrt{2}; +\infty[$ alors $f(x) \in [\sqrt{2}; +\infty[$
4. Démontrer que pour tout n entier $u_n \geqslant \sqrt{2}$
5. Démontrer que (u_n) est décroissante

EX N°7

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ (suite arithmético-géométrique)

1. Soit (v_n) définie par $v_n = u_n - 2$ avec $v_0 = 1$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique . En déduire que $v_n = (\frac{1}{2})^n$
2. En déduire que $u_n = 2 + (\frac{1}{2})^n$

EX N°8(Bac S 2015 : Pondichéry)

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel n, $\quad v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.
2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1\,;\,1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

EX N°9

On considère les polygones convexes à n côtés où $n \geqslant 3$.

Une diagonale d'un tel polygone est un segment qui relie 2 sommets non voisins (non reliés par un côté du polygone)

On s'intéresse à la suite (D_n) des diagonales

1. Conjecturer une formule pour D_n
2. Prouver la

EX N°10

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n^3 - n}{3}$

1. Calculer u_0,u_1, u_2 et u_3
2. Que peut on dire à propos de (u_n) ?
3. Démontrer cette conjecture par récurrence (on peut le faire autrement)

EX N°11

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$

1. Calculer u_0,u_1, u_2 et u_3
2. Que peut on dire à propos de (u_n) ?
3. Démontrer cette conjecture par récurrence (on peut démontrer cela autrement)

EX N°12

1. Calculer $1+3$, puis $1+3+5$, puis $1+3+5+7$
2. Qu'observez vous ? Conjecturer et prouver

EX N°13

1. Calculer 1^2+3^2, puis $1^2+3^2+5^2$, puis $1^2+3^2+5^2+7^2$
2. Qu'observez vous ? Conjecturer et prouver

EX N°14

Démontrer que : si l'on retire une case quelconque d'un échiquier $2^n \times 2^n$, où n est un entier non nul, on peut paver la partie restante à l'aide de pièces de trois cases en forme de L

EX N°15

Soit a un réel tel que $a + \dfrac{1}{a} \in \mathbb{Z}$.

1. Est ce que a peut être entier ?
2. Est ce que a peut être relatif ?
3. Est ce que a peut être rationnel ?(*)
4. Vérifier que $a = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ convient
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a^n + \dfrac{1}{a^n} \in \mathbb{Z}$

EX N°16

Soit P_n la proposition : " $4^n + 1$ est un multiple de 3 " où n désigne un entier naturel

1. Démontrer que pour tout entier naturel k si P_k est vraie alors P_{k+1} est vraie
2. Peut-on conclure que P_n est vraie pour tout n entier naturel ?

EX N°17

Soit P_n la proposition : " (u_n) est décroissante" où n désigne un entier naturel, pour (u_n) la suite définie à l'exercice 1.1

1. Démontrer que pour tout entier naturel k si P_k est vraie alors P_{k+1} est vraie
2. Peut-on conclure que P_n est vraie pour tout n entier naturel ?

EX N°18

Chercher l'erreur dans le raisonnement par récurrence suivant :

Nous allons démontrer par récurrence que " Toutes les femmes ont la même couleur des yeux"

Implicitement on va faire une récurrence sur le nombre n de femmes dans le monde.

1. Initialisation : Une seule femme a une seule couleur des yeux donc la propriété est vrai pour $i = 1$
2. Hérédité : Montrons que si tout groupe de k femmes a une même couleur des yeux alors tout groupe de $k+1$ femmes a une même couleur des yeux.
   En effet, dans n'importe quel ensemble de $k+1$ femmes $\{F_1, F_2, F_3, ..., F_{k+1}\}$ considérons le sous-ensemble $\{F_1, F_2, F_3, ..., F_k\}$ qui par hypothèse de récurrence a une même couleur des yeux puis $\{F_2, F_3, F_4, ..., F_{k+1}\}$ qui par hypothèse de récurrence a aussi une même couleur des yeux qui est la même couleur que celle du groupe précédent puisqu'il y a des femmes appartenant aux deux sous ensembles.
3. Conclusion : Toutes les femmes du monde ont la même couleur des yeux