Il s'agit de généraliser ce qui a été observé avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ associée à la suite de Fibonacci :

on a trouvé deux vecteurs propres de A non colinéaires c'est à dire deux vecteurs C_1 et C_2 tel que :

$AC_1 = \alpha C_1$ et $AC_2 = \beta C_2$ et $C = (C_1\ C_2)$ inversible

Ce qui a eu comme conséquence que $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

On dit alors que A est diagonalisable

Dans toute la suite les matrices sont carrées d'ordre $n \geqslant 2$

Définition
Etant donné une matrice A, le couple (λ, X) est un couple de valeur propre et vecteur propre de A si X est un vecteur **non nul** et si $AX = \lambda X$

Définition
$2 \leqslant p \leqslant n$ vecteurs X_i sont linéairement indépendants si $\sum_{i=1}^{i=p} c_i X_i = (0)$ alors tous les c_i sont nuls

Définition
A une matrice carrée d'ordre n est diagonalisable s'il existe une matrice inversible S et une matrice diagonale D tel que : $D = S^{-1}AS$

Théorème

A une matrice carrée d'ordre n est diagonalisable si et seulement si il existe n vecteurs propres linéairement indépendants (les valeurs propres ne sont pas forcément distinctes)

Preuve :

1. Supposons qu'il existe n vecteurs propres V_1,V_2, ...V_n linéairement indépendants de valeurs propres λ_1, ...λ_n donc la matrice $S = (V_1\ V_2\ ...V_n)$ est inversible
   $S^{-1}AS = S^{-1}A(V_1\ V_2\ ...V_n) = S^{-1}(AV_1\ AV_2\ ....AV_n) = S^{-1}(\lambda_1 V_1\ ....\lambda_n V_n) = S^{-1}(V_1\ V_2\ ...V_n)\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n) = S^{-1}S\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n) = I_n\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n)$
2. Réciproquement supposons A diagonalisable alors il existe une matrice inversible S et une matrice diagonale D tel que : $D = S^{-1}AS$ donc $SD = AS$. Notons λ_i les éléments de la matrice diagonale, ils ne sont pas forcément tous distincts
   $SD = (SD_1\ ....SD_n)$ or $(S_1\ ...S_n)D_i = \lambda_i S_i$ par conséquent $SD = (\lambda_1 S_1\ ....\lambda_n S_n)$ par identification pour chaque i on a $AS_i = \lambda_i S_i$
   on a bien n vecteurs propres linéairement indépendants
   (les vecteurs colonnes de S)

Théorème

A une matrice carrée d'ordre n

Si A a n valeurs propres toutes distinctes alors les vecteurs propres associés sont linéairement indépendants. Par conséquent A est diagonalisable

Preuve : (Exercice)

Matrices stochastiques (ou de Markov)

Définition
Une matrice A est stochastique suivant les colonnes si tous ces termes sont des probabilités et si la somme des colonnes valent toutes 1