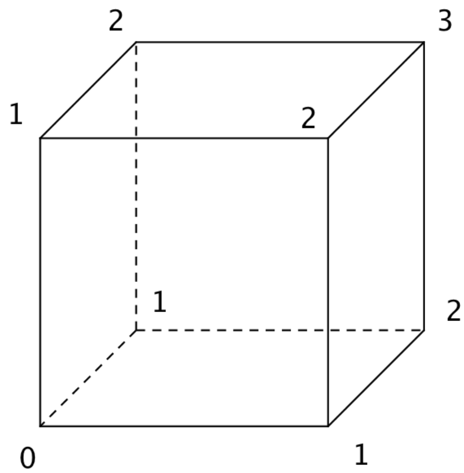



**Marche aléatoire sur un cube** On part d'un sommet d'un cube choisi comme origine, marqué par le nombre 0, et on se déplace au hasard sur les arêtes de ce cube pour rejoindre les autres sommets.

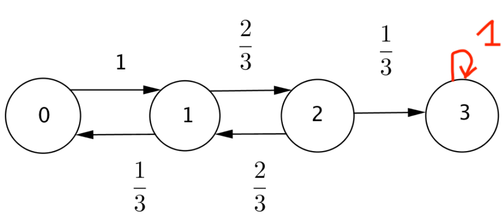
A la distance de une arête on trouve 3 sommets, tous marqués par le nombre 1. On suppose qu'on a la même chance d'atteindre ces 3 sommets.

Puis à la distance de 2 arêtes on trouve 3 sommets marqués par le nombre 2, et finalement on tombe sur le sommet diagonalement opposé à l'origine à une distance de 3 arêtes

On aimerait savoir le nombre **moyen** de déplacements pour passer de l'origine au sommet marqué par 3, lorsqu'on se déplace au hasard le long des arêtes

**Simulation** Créer un programme Python (avec des fonctions) pour simuler un parcours aléatoire et donner une estimation de ce nombre moyen

On pourra s'aider du **graphe probabiliste** suivant



**Première Modélisation** Soit $N$ la variable aléatoire étant égale au **nombre d'arêtes** parcourus entre 0 et 3

**Exercice**

1. Quelles sont les valeurs possibles de $N$ ?
2. Que valent $P(N=3)$, $P(N=5)$ ?
3. Conjecturer une formule pour $P(N=2k+1)$ avec $k \geqslant 1$
4. Montrer que $E(N)=10$ (attention $E(N)$ est une limite)

**Deuxième Modélisation** On considère un **vecteur colonne** d'état $E_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$

où $a_n$ est la probabilité d'être en 0 au bout de $n$ déplacements

$b_n$ est la probabilité d'être en 1 au bout de $n$ déplacements

$c_n$ est la probabilité d'être en 2 au bout de $n$ déplacements

$d_n$ est la probabilité d'être en 3 au bout de $n$ déplacements

1. Donner $E_0$, $E_1$ , $E_2$ et $E_3$ (s'aider du graphe probabiliste)
2. Exprimer $a_{n+1}$, $b_{n+1}$, $c_{n+1}$, $d_{n+1}$ en fonction de $a_n$ ,$b_n$, $c_n$ et $d_n$
3. Trouver une matrice $T$ dite de **transition** telle que $E_{n+1} = TE_n$
   Vérifier que :
   (a) Tous les termes de la matrice sont compris entre 0 et 1
   (b) La somme des éléments d'une colonne vaut 1 (pourquoi ?). On dit alors que $T$ est une matrice **stochastique** (selon les colonnes)
4. Par conséquent $E_n = T^n E_0$. Nous avons vu en exercice dans le précédent chapitre que les puissances de matrices diagonales sont faciles à calculer .
   Les matrices stochastiques sont **similaires** au sens suivant à des matrices diagonales :
   Il existe une matrice diagonale $D$ et une matrice inversible $S$ telles que
   $$T = SDS^{-1}$$
   Les nombres situés sur la diagonale principale sont appelés les **valeurs propres** de $T$
   Exprimer $T^n$ en fonction de $D^n$
5. On utilise numpy pour obtenir les valeurs propres de $T$ en faisant eigvals($T$) eigvals() pour eigenvalue = valeur propre .
   Les vecteurs colonnes de $S$ sont appelés **vecteurs propres** de $T$
   On note $\lambda_1$ la première valeur propre 1, que valent $\lambda_2$, $\lambda_3$ et $\lambda_4$ ? (lire ci-dessous)

```
3.5.2 (default, Sep  3 2016, 16:46:41)
[GCC 4.8.1]
Python Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
>>> import numpy as np
>>> import numpy.linalg as alg
>>> T = np.array([[0,1/3,0,0],[1,0,2/3,0],[0,2/3,0,0],[0,0,1/3,1]])
>>> alg.eigvals(T)
array([ 1.        ,  0.8819171, -0.8819171,  0.        ])
>>> S = alg.eig(T)
>>> print(S[1])
[[ 0.00000000e+00   1.50971118e-01  -2.87177435e-01   5.34522484e-01]
 [ 0.00000000e+00   3.99432033e-01   7.59800076e-01   4.41036383e-18]
 [ 0.00000000e+00   3.01942236e-01  -5.74354871e-01  -8.01783726e-01]
 [ 1.00000000e+00  -8.52345387e-01   1.01732230e-01   2.67261242e-01]]
```

On constate que **1 est une valeur propre et que les autres valeurs sont en valeur absolue strictement inférieur à 1**.

Ceci aura des conséquences importantes pour trouver le **régime permanent ou l'état d'équilibre du système étudié**

Le vecteur propre associé à 1 est $S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Vérifier que $TS_1 = 1 \times S_1$

6. La matrice $S$ des vecteurs propres est inversible cela signifie aussi que les vecteurs $S_1$,$S_2$,$S_3$ et $S_4$ sont **linéairement indépendants** cela signifie que la seule combinaison linéaire des $S_i$ qui donne le vecteur nul est $\sum_{i=1}^{4} 0 \times S_i$, cela nous assure que tout vecteur de $\mathbb{R}^4$ donc par exemple $E_0$ **s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire** des $S_I$.

   Justifier que l'écriture matricielle de $E_0 = \sum_{i=1}^{4} c_i \times S_i$ est $SC = E_0$ où $C$ est le vecteur colonne composé des $c_i$

   Pour obtenir $C$ on utilise numpy en faisant (résolution de système) alg.solve(S,$E_0$)

```
>>> E = np.array([[1],[0],[0],[0]])
>>> alg.solve(S[1],E)
array([[ 1.        ],
       [ 1.41938218],
       [-0.7461788 ],
       [ 1.06904497]])
```

7. Montrer par récurrence que

   pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $E_n = T^n E_0 = T^n(\sum_{i=1}^{4} c_i \times S_i) = \sum_{i=1}^{4} c_i T^n S_i = \sum_{i=1}^{4} c_i \lambda_i^n S_i$

8. Justifier que si $n \to \infty$ alors $E_n$ tend vers une limite $E^*$

   (état permanent car $TE^* = E^*$ ) ?

   ($\lambda_1 = 1$ et les autres $\lambda_i$ sont en valeur absolue strictement inférieurs à 1)

**Troisième Modélisation** On considère un **vecteur ligne** d'état $E_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n & d_n \end{pmatrix}$ où $a_n$ est la probabilité d'être en 0 au bout de $n$ déplacements

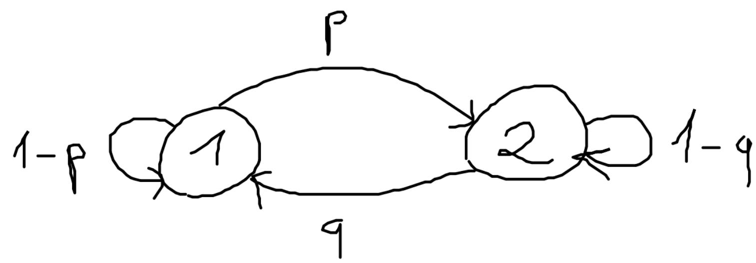
$b_n$ est la probabilité d'être en 1 au bout de $n$ déplacements

$c_n$ est la probabilité d'être en 2 au bout de $n$ déplacements

$d_n$ est la probabilité d'être en 3 au bout de $n$ déplacements

1. Donner $E_0$, $E_1$ , $E_2$ et $E_3$ (s'aider du graphe probabiliste)
2. Trouver une matrice $T$ dite de **transition** telle que $E_{n+1} = E_n T$
   Vérifier que :
   (a) Tous les termes de la matrice sont compris entre 0 et 1
   (b) La somme des éléments d'une ligne vaut 1 (pourquoi ?)
   On dit que $T$ est une matrice stochastique (selon les lignes)
   Par conséquent $E_n = E_0 T^n$.
3. On définit la transposée $M^T$ d'une matrice $M$ de la manière suivante : si le terme général de $M$ est $m_{ij}$ avec $n$ lignes et $p$ colonnes , c'est à dire $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$ alors le terme général de $M^T$ est $m_{ji}$ c'est donc une matrice avec $p$ lignes et $n$ colonnes
   Par exemple si $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ alors $M^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
   En admettant que $(AB)^T = B^T A^T$ montrer par récurrence que $E_n^T = (T^T)^n E_0^T$.
   Conclusion ?

**Echange de populations** On observe l'échange de populations entre deux régions notées 1 et 2 au cours des ans. On a modélisé cet échange par le graphe probabiliste ci-dessous




1. Chaque année une proportion $p$ de la région 1 émigre vers la région 2
2. Chaque année une proportion $q$ de la région 2 émigre vers la région 1
3. A l'instant initial il y a une certain nombre $A$ d'habitants dans la région 1 et un certain nombre $B$ dans la région 2
4. L'état du système est décrit par un vecteur colonne $E_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ où $a_n$ (respectivement $b_n$) est le nombre d'habitants dans la région 1 (respectivement dans la région 2) au bout de $n$ ans

**Questions**

1. Décrire la transition entre deux états successifs par une matrice de transition $T$. Vérifier que $T$ est une matrice stochastique suivant les colonnes
2. Que valent $E_0$ et $E_1$ ?
3. Puisque $E_n = T^n E_0$, on cherche à simplifier le calcul de $T^n$.
   **Rappel concernant la suite de Fibonnacci, d'un point de vue matriciel**
   Pour simplifier le calcul de $A^n$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   On avait deux vecteurs colonnes $C_1$ et $C_2$ non colinéaires tel que $AC_1 = \alpha C_1$ et $AC_2 = \beta C_2$
   Ensuite en considérant la matrice $P = (C_1 \ C_2)$ inversible on avait montré que $P^{-1}AP$ est diagonale
   Une valeur propre $\lambda$ de $T$ et un vecteur propre $V_\lambda$ **non nul** associé à la valeur propre $\lambda$ vérifient
   $$TV_\lambda = \lambda V_\lambda$$
   (Intuitivement vis à vis de certains vecteurs dits "propres" , $T$ se comporte comme une homothétie qui est une opération géométrique "simple")
   $TV_\lambda = \lambda V_\lambda \iff (T - \lambda I)V_\lambda = (0) \iff (*)\det(T - \lambda I) = 0$
   Vérifier que $P(\lambda) = \det(T - \lambda I)$ est le polynôme du second degré
   $\lambda^2 - (2 - (p + q))\lambda + 1 - (p + q)$
   Vérifier que 1 est racine de $P(\lambda)$, en déduire l'autre racine $\lambda_2$ (penser relation racine-coefficient)

4. Considérer dans un premier temps les cas limites
5. Montrer que $|\lambda_2| < 1$
6. Chercher un vecteur propre "simple" $V_1$ pour la valeur propre 1, autrement dit, chercher $V_1$ tel que $TV_1 = V_1$
7. Chercher un vecteur propre "simple" $V_2$ pour la valeur propre $\lambda_2$, autrement dit, chercher $V_2$ tel que $TV_2 = \lambda_2 V_2$
8. Soit $P$ la matrice définie par $P = (V_1\ V_2)$. Montrer que $P$ est inversible. Que vaut $P^{-1}V_1$ et $P^{-1}V_2$ ?
9. En déduire l' expression de $D = P^{-1}TP$
10. En déduire l'expression de $T^n$
11. Que vaut $E_n$ ? Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} E_n$

**Autre façon**

1. Décomposer $E_0$ comme une combinaison linéaire de $V_1$ et $V_2$ (autrement dit $E_0 = c_1V_1 + c_2V_2$ avec $c_i \in \mathbb{R}$
2. Exprimer $E_n$ en fonction de $c_1,\ V_1,\ c_2,\ \lambda_2,\ V_2$ et $n$
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} E_n$

**propriété (*)** Prouver que : Soit $M$ une matrice carrée d'ordre 2, s'il existe un vecteur colonne $X$ **non nul** $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $MX = (0)$ alors les vecteurs colonnes $M_1$ et $M_2$ sont colinéaires autrement dit $\det(M) = 0$

Etudier la réciproque

**A retenir** Pour une matrice stochastique $2\times 2$ par exemple $T = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ où $p$ et $q$ sont deux nombres appartenant à $]0;1[$ on retiendra que :

(On exclut les cas où $p = q = 0$, car $T = I$ )

1. $T$ a deux valeurs propres différentes 1 et $\lambda = 1 - (p+q)$ tel que $|\lambda| < 1$
2. Par conséquent $T$ est diagonalisable
3. $T^n = PD^nP^{-1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T^n = P \lim\limits_{n\to+\infty} D^nP^{-1}P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$

   où $P = (V_1\ V_2)$ tel que $TV_1 = V_1$ et $TV_2 = \lambda V_2$

   avec $V_1 = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

   Donc

   $$\lim_{n\to+\infty} T^n = \frac{1}{-p-q}\begin{pmatrix} q & 1 \\ p & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{q}{p+q} \\ \frac{p}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{pmatrix} = \frac{1}{(p+q)}(V_1\ V_1)$$

   **Conclusion** la matrice limite est stochastique et proportionnelle à une matrice dont les deux vecteurs colonnes sont le vecteur propre associée à la valeur propre 1