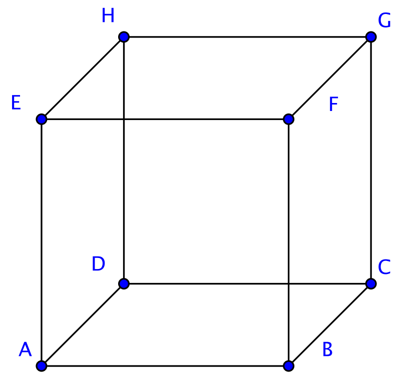
Produit scalaire dans l'espace

EX N°1



$ABCDEFGH$ un cube de côté a. Calculer les produits scalaires suivants Démontrer que

1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$
3. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{FB}$
4. $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AB}$
5. $\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{FC}$
6. I est le milieu de $[AC]$, $\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{FC}$

EX N°2

Relativement au cube calculer la mesure en degrés de l'angle AIE

EX N°3

Montrer que le produit scalaire est bilinéaire et symétrique

EX N°4

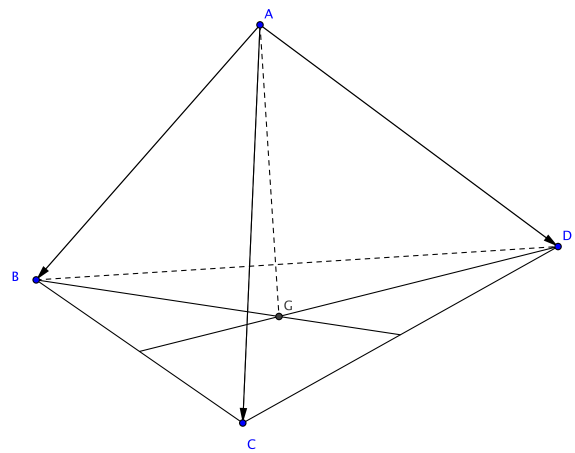
1. Montrer que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2) - ||\overrightarrow{u-v}||^2)$ (calculer $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$ de deux manières différentes)
2. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs tels que $||\overrightarrow{u}|| = 1$ et $||\overrightarrow{v}|| = 2$ et $||\overrightarrow{v-u}|| = \sqrt{5}$, que vaut $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$?

EX N°5

On munit le cube du repère $(D; \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DH})$

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BG}$
2. Calculer $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{BG}$ (de deux manières différentes)
3. Que peut on en déduire ?
4. Redémontrer ce résultat sans produit scalaire

EX N°6



On suppose que le tétraèdre ABCD est régulier ce qui signifie que les 4 côtés ont la même longueur a

G est le centre de gravité du triangle BCD, I est le milieu du segment $[BC]$, J est le milieu de $[DC]$, et K est le milieu de $[BD]$

Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}$
2. $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BJ}$
3. $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC}$
4. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$
5. $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}$

EX N°7

Relativement au tétraèdre régulier d'arête a, soit O le point défini par

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$$

Sous quel angle voit on une arête de ce tétraèdre si on est placé en O ?

EX N°7,5

Relativement au tétraèdre régulier d'arête a.

1. Démontrer que pour tout point M de l'espace $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=MI^2-\dfrac{a^2}{4}$
2. Quel est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=\dfrac{a^2}{4}$?
3. Quel est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=-\dfrac{a^2}{2}$?

EX N°8

L'espace est muni d'un repère orthonormé

$A(0;1;2)$, $B(1;2;3)$, $C(5;-3;-2)$, $D(7;-4;-3)$ sont quatre points de l'espace

1. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales
2. les points A, B, C, D sont ils coplanaires ?
3. ABC est il un triangle isocèle ?

EX N°9

L'espace est muni d'un repère orthonormé

$A(0;1;2)$, $B(1;2;3)$, $C(5;-3;-2)$, $D(7;-4;-3)$ sont quatre points de l'espace

1. Vérifier que (ABC) est un plan
2. Le vecteur $\overrightarrow{n}(0;1;-1)$ est il normal au plan (ABC) ?

EX N°10

L'espace est muni d'un repère orthonormé

$A(0;1;2)$, $B(1;2;3)$, $C(5;-3;-2)$, $D(7;-4;-3)$ sont quatre points de l'espace

1. Vérifier que (ABD) est un plan
2. Trouver un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal au plan (ABC)

EX N°11

Déterminer un vecteur normal à chacun des plans suivants :

1. P_1 d'équation $2x - y + z - 3 = 0$
2. P_2 d'équation $y = x + 1$
3. P_3 d'équation $z = 2$
4. P_4 de représentation paramétrique

$$P_4 : \begin{cases} x = 3 + t + 2s \\ y = 9 + 3t + s \\ z = 2 - s \end{cases} \qquad (t, s \in \mathbb{R})$$

EX N°12

Détreminer une équation cartésienne du plan passant par le point A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$

1. $A(1;2;3)$ et $\overrightarrow{n}(1;1;1)$
2. $A(-1;0;1)$ et $\overrightarrow{n}(1;0;0)$
3. $A(1;-1;0)$ et $\overrightarrow{n}(0;1;1)$

EX N°13

Est ce que les plans P et P' d'équations cartésiennes respectives sont sécants ?

$x+y-z=0$ et $2x-y-1=0$. Si ils le sont donner une représentation paramétrique de leur intersection

EX N°14

Les objets mathématiques peuvent être différents mais du point de vue du calcul se comportent de la même manière , que ce soit des fonctions continues sur $\mathbb{R}$,des vecteurs de l'espace, des nombres complexes, des matrices, etc... on calcule avec presque de la même manière, aussi pour marquer cette similitude on a introduit la notion de $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Ensuite on cherche à calculer des longueurs dans ces espaces et de fait on introduit un produit scalaire ou une norme.

Regardons l'ensemble des polynômes de degré au plus $n \geqslant 1$ où $P(X)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, on peut coder P par le $n+1$ uplet $(a_0, a_1, ..., a_n)$

1. Définir sur l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n un produit scalaire par analogie avec celui vu avec les vecteurs de l'espace
2. Dans la suite $n=2$, on cherche l'ensemble des polynômes orthogonaux au trinôme x^2+1
   (a) Montrer que x et x^2-1 sont orthogonaux à x^2+1
   (b) En déduire l'ensemble cherché

EX N°15

1. Montrer que $(f,g) \to \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ est bilinéaire,symétrique et définie positive sur l'ensemble des fonctions continues sur $[0;2\pi]$. On définie ainsi un produit scalaire
2. Calculer $\int\limits_0^{2\pi} \cos(x)\cos(2x)\mathrm{d}x$ (Aide : on ne peut pas primitiver aussi on va transformer un produit de fonctions trigonométriques en somme (linéarisation) ainsi :
   (a) Remplacer $\cos(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}$ puis $\cos(2x)=\dfrac{\mathrm{e}^{i2x}+\mathrm{e}^{-i2x}}{2}$ et en déduire que $\cos(x)\cos(2x)=\dfrac{1}{2}\cos(3x)+\dfrac{1}{2}\cos(x)$
   (b) En déduire que l'intégrale est nulle)
3. Montrer que $\int\limits_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x = 0$ si $m \neq n$ et $=1$ si $m=n$
4. Montrer que $\int\limits_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\mathrm{d}x = 0$ si $m \neq n$ et $=1$ si $m=n$
5. Montrer que $\int\limits_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{2\pi} \cos(mx)\sin(nx)\mathrm{d}x = 0$ pour $m,n \in \mathbb{N}^*$
6. Par analogie avec les vecteurs de l'espace comment peut on interpréter les fonctions $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$