Produit scalaire dans l'espace

Vallon

2 février 2016

- Il existe un repère orthonormé de l'espace $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ permet de calculer des distances dans l'espace

Définition

La norme du vecteur $||\overrightarrow{AB}||$ est la distance AB

- On définit à partir de cette norme le produit scalaire de deux vecteurs
- On veut que ce produit soit bi-linéaire et symétrique

Définition

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$
- $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) + \overrightarrow{v}.(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})$
- $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$
- $||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 = (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = ||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$
- D'où $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2)$

Remarque : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$

Donc $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = (2\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.(2\overrightarrow{v})$

Définition

On définit sur l'ensemble des vecteurs de l'espace un produit par la formule suivante

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2)$$

Théorème

1. *Ce produit* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \rightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ *est bilinéaire et symétrique*
2. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} \geqslant 0$

Démonstration.

Exercice □

Théorème

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0 \iff$ *les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires*

Démonstration.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0 \iff ||\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}||^2 = ||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{CD}||^2$ (Théorème de Pythagore) $\iff$ les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires $\square$

Théorème

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ *où H est le projeté orthogonal de C sur la droite* (AB)

Démonstration.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} + \underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}}_{=0}$$

□

Théorème

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AC}|| \cos((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}))$

Démonstration.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens alors
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AH}|| = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AC}|| \cos((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}))$
Sinon $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = -||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AH}|| = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AC}|| \cos((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}))$

□

Théorème

Relativement au repère orthonormé de l'espace si $\overrightarrow{u}(x;y;z)$ *et* $\overrightarrow{u}(x';y';z')$ *alors* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$

Démonstration.

$||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = (x+x')^2 + (y+y')^2 + (z+z')^2$

Donc $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2 = 2xx' + 2yy' + 2zz'$ □

Théorème

- *Les droites* $(A; \vec{u})$ *et* $(B; \vec{v})$ *sont orthogonales* $\iff$ $\vec{u}.\vec{v} = 0$
- *La droite* $(A; \vec{u})$ *et le plan* $(B; \vec{v}, \vec{w})$ *sont orthogonaux* $\iff$ $\vec{u}.\vec{v} = 0$ *et* $\vec{u}.\vec{w} = 0$

Démonstration.

1. Les droites $(A; \vec{u})$ et $(B; \vec{v})$ sont orthogonales $\iff$ il existe C et D tel que ACD est un triangle rectangle en A et $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ $\iff$ $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = 0$ $\iff$ $\vec{u}.\vec{v} = 0$
2. La droite $(A; \vec{u})$ et le plan $(B; \vec{v}, \vec{w})$ sont orthogonaux $\iff$ $(A; \vec{u})$ et la droite $(B; \vec{v})$ sont orthogonales et $(A; \vec{u})$ et la droite $(B; \vec{w})$ sont orthogonales

□

Définition

$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan P défini par $(B; \vec{v}, \vec{w})$ si
$\vec{n}.\vec{v} = 0$ et $\vec{n}.\vec{w} = 0$

Théorème

A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul . L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$

Démonstration.

On peut trouver deux points C et D tels que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{n} = 0$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{n} = 0$ et tel que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ soient non colinéaires car on est dans l'espace
Donc le produit scalaire de $\vec{n}$ par toute combinaison linéaire de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ est nul donc l'ensemble cherché est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ (cet ensemble n'est pas l'espace tout entier car $\vec{n}$ est non nul) $\square$

Théorème

- *Un plan de vecteur normal* $\vec{n}(a; b; c)$ *a une équation de la forme* $ax + by + cz + d = 0$
- *Réciproquement l'ensemble des points* $M(x; y; z)$ *vérifiant* $ax + by + cz + d = 0$ *est un plan de vecteur normal* $\vec{n}(a; b; c)$

Démonstration.

- $M(x; y; z)$ appartient au plan $(A(a_1; a_2; a_3); \vec{n}(a; b; c)) \iff \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ $\iff (x - a_1)a + (y - a_2)b + (z - a_3)c = 0 \iff$ $ax + by + cz \underbrace{-aa_1 - ba_2 - ca_3}_{=d} = 0$
- Exercice

$\square$

Théorème

- *La droite* $(A; \vec{u})$ *est parallèle au plan* $(B; \vec{n})$ *si et seulement si* $\vec{u}.\vec{n} = 0$
- *La droite* $(A; \vec{u})$ *est perpendiculaire au plan* $(B; \vec{n})$ *si et seulement si* $\vec{u}$ *est colinéaire à* $\vec{n}$
- *Les plans* $(B; \vec{n})$ *et* $(C; \vec{n'})$ *sont parallèles si et seulement si les vecteurs normaux sont colinéaires*

Définition

Les plans Les plans $(B; \vec{n})$ et $(C; \vec{n'})$ sont perpendiculaires lorsque $\vec{n}.\vec{n'} = 0$