Nombres Complexes : Forme exponentielle

EX N°1

On admet l'existence de la fonction $t \to e^{it}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ comme seule solution de l'équation différentielle $f'(t) = if(t)$ avec $f(0) = 1$

1. Montrer que $t \to \cos(t) + i\sin(t)$ est aussi solution de l'équation différentielle ci-dessus
2. Que peut on en déduire ?

EX N°2

Prouver que pour tous nombres complexes z et z' on a :

1. $|zz'| = |z||z'|$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|z^n| = (|z|)^n$
3. Si $z' \neq 0$ alors $|\dfrac{z}{z'}| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

EX N°2

Calculer le module des nombres complexes :

1. $z_1 = (1+i)^5$
2. $z_2 = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{1+i}$

EX N°3

(R.O.C)

1. Prérequis : Pour tout nombre complexes non nuls z et z' on a :

$$|zz'| = |z||z'|$$

$$arg(zz') = arg(z) + arg(z')[2\pi]$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $|z^n| = (|z|)^n$ et $arg(z^n) = narg(z)[2\pi]$

2. Déterminer le module et un argument de $z = 1 + i\sqrt{3}$
3. En déduire la forme exponentielle de z^{30}

EX N°4

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$
2. $z_2 = e^{i\pi}$
3. $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$
4. $z_2 = \dfrac{3e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

EX N°5

Simplifier i^i

EX N°6

Mettre sous forme exponentielle :

1. $z_1 = -2\sqrt{3} + 6i$
2. $z_2 = -\cos(\dfrac{\pi}{3}) + i\sin(\dfrac{\pi}{3})$

EX N°7

Soit $z_1 = -1 - i$ et $z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$

1. Mettre $\dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique et sous forme exponentielle
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\dfrac{11\pi}{12})$ et $\sin(\dfrac{11\pi}{12})$

EX N°8

Utiliser la forme exponentielle pour justifier que :

1. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
2. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
3. En déduire $\cos(a-b)$, $\sin(a-b)$, $\tan(a+b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$, $\cos(a)\cos(b)$,$\sin(a)\sin(b)$ et $\cos^2(a)$ et $\sin^2(a)$

EX N°9

1. Vérifier que les nombres complexes $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$ sont les seules solutions de l'équation $z^n = 1$ dans $\mathbb{C}$
   On les appelle les racines n-ièmes de l'unité
2. Calculer $|z_i - z_j|$ avec $|i - j| = 1$. Qu'observez vous ? Interprétation géométrique

EX N°10

1. Simplifier $E_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} e^{ik\theta}$
2. En déduire $C_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \cos(k\theta)$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \sin(k\theta)$

EX N°11

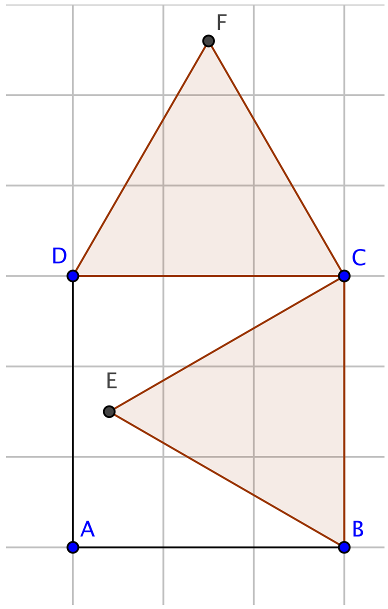
1. Exprimer $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de e^{ix} et e^{-ix}
2. En déduire une expression de $\cos^2(x)$ et $\cos^3(x)$ sans puissance

EX N°12

Soit f_θ la fonction définie sur $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $z \to ze^{i\theta}$

1. Soit z un nombre complexe non nul . Mettre l'image z' de z par f_θ sous forme exponentielle en déduire que $|z'| = |z|$ et $arg(z') = arg(z) + \theta[2\pi]$
2. On associe la transformation géométrique T_θ à f_θ ce qui signifie que $T_\theta(M) = M'$ où l'image de z est M et l'image de z' et M'. Que peut on dire de T_θ ?

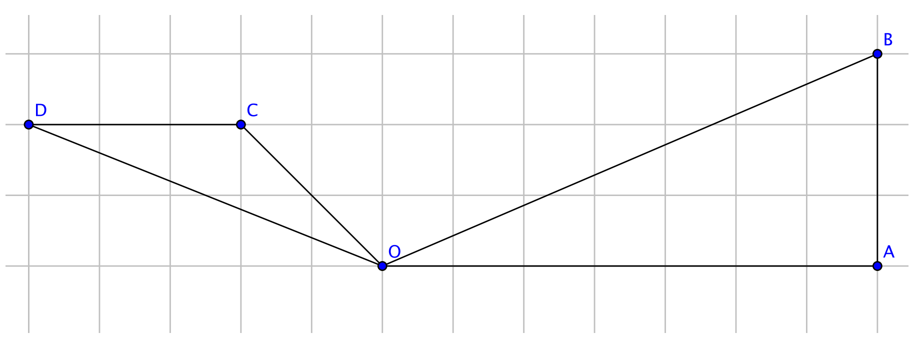
EX N°13



ABCD est un carré de sens direct, BCE et DCF sont des triangles équilatéraux de sens direct

1. Que peut on conjecturer au sujet des points A,E et F ?
2. Déterminer les affixes a, b, c, d des points A,B,C et D dans le repère orthonormé direct $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$
3. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CE})$
4. Déterminer la valeur du quotient $\dfrac{CE}{CB}$
5. Soit $Z = \dfrac{e-c}{b-c}$. Déduire de ce qui précède la forme exponentielle de Z
6. En déduire la forme algébrique de e
7. De même trouver la forme algébrique de f
8. Démontrer la conjecture

EX N°15



Comparer les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$