Nombres Complexes 1

EX N°1

Déterminer la forme algébrique de chaque nombre complexe :

1. $z_1 = (2+3i)(1-2i)$
2. $z_2 = (1+2i)^2$
3. $z_3 = i^n$ avec $n \in \mathbb{N}$
4. $z_4 = (1+2i)(1-2i)$ et $z_4 = (a+bi)(a-bi)$
5. $z_5 = \dfrac{1}{2+3i}$
6. $z_6 = 1 + i + i^2 + ... + i^n$
7. $z_7 = 1 - i + i^2 - i^3 + ... + (-i)^n$
8. $z_8 = \dfrac{a+bi}{b-ai}$

EX N°2

On pose $j = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

1. Calculer j^2, j^3 puis j^n pour tout n entier
2. Vérifier que $1 + j + j^2 = 0$
3. Calculer la somme $S = 1 + j + j^2 + j^3 + ... + j^{2015}$

EX N°3

Déterminer de deux façons différentes la forme algébrique du conjugué de :

1. $z_1 = (1+i)^3$
2. $z_2 = \dfrac{1+2i}{3-i}$

EX N°4

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z = \overline{z}$
2. $2i\overline{z} = 1 + i$
3. $2z + 3\overline{z} = 3 - i$

EX N°5

Relativement à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ on a les points $A(-2;-1)$, $B(4;0)$ et $C(0;4)$

Quels sont les affixes des points A, B et C

EX N°6

A, B et C les points d'affixes $z_A = 2+i$, $z_B = -2i$ et $z_C = -1$. Placer A,B et C

EX N°7

Soit A, B, C et D les points d'affixes $z_A = -2i$, $z_B = 3 - 2i$, $z_C = 2$ et $z_D = -1$

1. Placer les points
2. Montrer de deux manières que $ABCD$ est un parallélogramme

EX N°8

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Z = iz + 2\overline{z} + 1$ soit :

1. un imaginaire pur
2. un nombre réel

EX N°9

Calculer le module et un argument de :

1. $z = 4i$
2. $z = -2$
3. $z = a\sqrt{3} + bi$ où $a = -1$ ou 1 et $b = -1$ ou 1
4. $z = a + b\sqrt{3}i$ où $a = -1$ ou 1 et $b = -1$ ou 1

EX N°10

Calculer un module et un argument de chaque nombre complexe puis l'écrire sous forme trigonométrique :

1. $z_1 = \dfrac{1}{1-i}$
2. $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i\sqrt{3}}$

EX N°11

Dans chaque cas, déterminer graphiquement l'ensemble M du plan dont l'affixe z vérifie :

1. $|z| = 2$
2. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$
3. $2 \leqslant |z| \leqslant 4$
4. $|z-2| = |z+2i|$
5. $|z+1+i| = 2$

EX N°12

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$

Vrai ou Faux :

1. Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$. Pour tout entier naturel n non nul , z^{3n} est un imaginaire pur
2. Soit A le point d'affixe $2 - 5i$ et B le point d'affixe $7 - 3i$, le triangle OAB est rectangle

3. Si $|z| = 1$ alors $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ est un nombre réel

EX N°13

1. R.O.C
   (a) Démontrer que pour tous nombres complexes z et z' on a $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
   (b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n et tout nombre complexe z on a :
   $$\overline{z^n} = \overline{z}^n$$
2. Il s'agit de prouver que tout polynôme de degré 3 à <u>coefficients réels</u> a au moins <u>une racine réelle.</u>
   (a) Soit $P(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$. On suppose que P a au moins une racine complexe α. Montrer que $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P
   (b) A l'aide du théorème suivant
   (Théorème de d'Alembert-Gauss) : Tout polynôme non constant, à coefficients complexes, admet au moins une racine complexe.
   déduire que P a trois racines complexes que l'on notera α_1, α_2 et α_3
   (c) En discutant suivant le nombre de racines imaginaires pures de P montrer que dans tous les cas P a au moins une racine réelle
   (d) Etendre cette propriété

EX N°14

1. Montrer que tout polynôme de degré 2 à <u>coefficients réels</u> de la forme $z^2 + a$ a deux racines.(Envisager deux cas)
2. Vérifier que tout polynôme de degré 2 à coefficients réels $P(z) = az^2 + bz + c$ avec $a \neq 0$ peut se mettre sous la forme canonique $P(z) = a((z + \dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2})$ où $\Delta = b^2 - 4ac$
3. Suivant le signe de Δ étudier les différents types de racines pour P

EX N°15

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $z^2 - 4z + 4 = 0$
2. $2z^2 + 3z - 5 = 0$
3. $3z^2 + 6z + 4 = 0$
4. $z^2 = -4$

EX N°16

Il s'agit de trouver les racines troisièmes de l'unité c'est à dire les solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^3 = 1$

1. Vérifier que 1 est racine de $z^3 - 1$. En déduire que $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$

2. Trouver les deux autres racines de $z^3 - 1$
3. Mettre les racines sous forme trigonométrique
4. Etudier les racines quatrièmes de l'unité et conjecturer la forme générale des racines n-ièmes de l'unité où $n \in \mathbb{N}^*$