Modèle d'évolution - Partie 1

1 Problématique

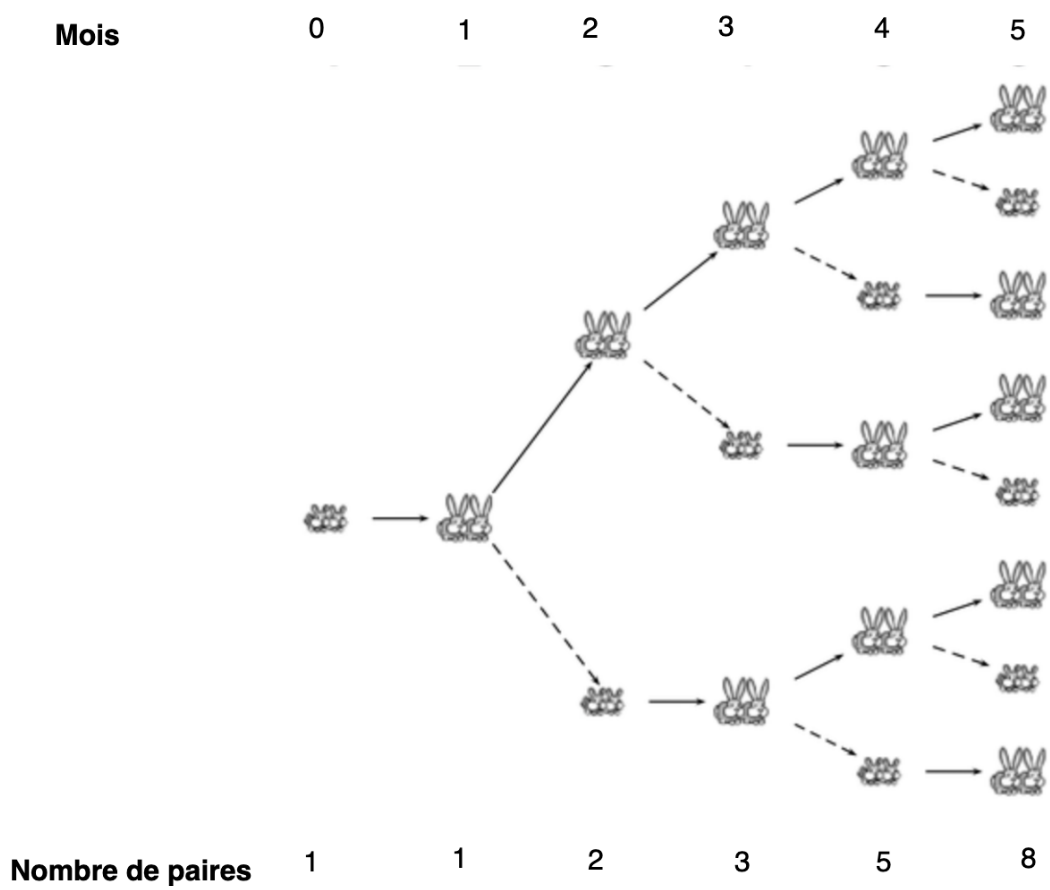
Quel est le rôle d'un **modèle** en sciences ?
Plus précisément quel est le rôle d'un **modèle mathématique** en sciences ?
Regardons cela sur le problème de l'évolution de populations

2 Suite de Fibonnacci (1202)

Leonardo Fibonnacci (Léonard de Pise) est considéré comme un des plus grands mathématiciens du Moyen-Age.

Problème :

1. A l'instant initial 0, il y a un couple de jeunes lapins mâle et femelle
2. Au bout de 1 mois un couple de jeunes lapins devient adulte, se reproduit et donne naissance à un couple de jeunes lapins mâle et femelle
3. Combien y-a-t-il de couples de lapins au bout de n mois ?



On va utiliser le langage des suites pour résoudre ce problème :

Soit A_n le nombre de couples de lapins adultes au mois n et J_n le nombre de couples de jeunes lapins au mois n, alors :

1. **Conditions initiales** $J_0 = 1$, $A_0 = 0$, $J_1 = 0$ et $A_1 = 1$
2. **Formule de récurrence permettant de passer de l'étape n à $n+1$**
   $A_{n+1} = A_n + J_n$ et $J_{n+1} = A_n$
3. **Simplification** On note C_n le nombre de couples total au mois n
   Donc $C_n = A_{n+1}$
   $C_{n+1} = A_{n+2} = A_{n+1} + J_{n+1} = C_n + J_{n+1} = C_n + A_n = C_n + C_{n-1}$
   On obtient une suite célèbre appelée suite de Fibonnacci notée (F_n) et définie par
   $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ avec $F_0 = F_1 = 1$
   Calculons quelques termes
   $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 1 = 2$
   $F_3 = F_2 + F_1 = 2 + 1 = 3$

Traduction en Python

```
def fibonnacci(n):
    fib = [0]*(n+1)
    fib[0] = 1
    fib[1] = 1
    for i in range(2,n+1):
        fib[i] = fib[i-1] + fib[i-2]
    return fib[n]
```

Exemple : Au bout de 12 mois fib(12) $=$, au bout de 24 mois fib(24) $=$

3 Malthus (1798)

"La race humaine croîtra selon la progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256... tandis que les moyens de subsistance croîtront selon la progression 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Au bout de deux siècles, population et moyens de subsistance seront dans le rapport de 256 à 9 ;au bout de trois siècles, 4 096 à 13 et après deux mille ans la différence sera immense et incalculable" (Malthus - Essai sur le principe de population)

Traduit dans le langage des suites notons (p_n) la progression des puissances de 2, on a $p_n = 2^n$ et notons s_n la progression des entiers, on a $s_n = n + 1$

Ces deux suites représentent deux grandes familles de suite, les suites arithmétiques et les suites géométriques

Définition 1 *On dit qu'une suite est* ***arithmétique*** *si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la différence de deux termes consécutifs est* ***toujours*** *constant, on appelle la raison de la suite arithmétique cette constante*

Traditionnellement on note r la raison

$u_{n+1} - u_n = r$

Théorème 1 *Si (u_n) est arithmétique alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = nr + u_0$ (expression affine de n)*

Théorème 2 $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Théorème 3 *Si* (u_n) *est arithmétique alors*

$S = u_0 + u_1 + ... + u_n = \dfrac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$

Plus généralement $S = u_p + u_{p+1} + ... + u_m = \dfrac{u_p + u_m}{2} \times (m - p + 1)$

Un moyen mnémotechique pour retenir ce théorème : "On fait la moyenne des extrêmes que l'on multiplie par le nombre de termes "

Définition 2 *On dit qu'une suite est* ***géométrique*** *si pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *le quotient de deux termes consécutifs est* ***toujours*** *constant, on appelle la raison de la suite géométrique cette constante*

Traditionnellement on note q *la raison*

$u_{n+1} - u_n = q$

Théorème 4 *Si* (u_n) *est géométrique alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $u_n = q^n \times u_0 = q^{n-1}u_1 = q^{n-2}u_2 = ...$ *(expression exponentielle de* n*)*

Théorème 5 $1 + q + q^2 + ... + q^n = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

On va donner un sens mathématique à "et après deux mille ans la différence sera immense et incalculable" en introduisant la notion de limite infinie

Mais d'abord un problème :

Que se passe-t-il si on calcule la somme suivante pour n "assez grand" (Paradoxe de Zénon") ?

$S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + ... + \dfrac{1}{2^n}$?

$S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + ... + \dfrac{1}{2^n} = 2(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}})$

Intuitivement on se rend compte que si n devient grand $\dfrac{1}{2^{n+1}}$ devient petit et par conséquent la somme est "proche" de 2

Il s'agit de donner un sens mathématique à cela

Définition 3 *On dit qu'une suite* (u_n) *tend vers* $+\infty$ *si pour tout nombre* $A > 0$ *il existe un rang* N *à partir duquel tous les termes de la suite sont plus grands que* A

On note cela $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

A partir de cette définition on peut montrer que les suites suivantes ont toutes pour limites $+\infty$

(n), (n^2), (n^k) avec k entier , (2^n) et plus généralement (q^n) avec $q > 1$

Plusieurs siècles après Malthus on a observé un "comportement asymptotique" on dirait que le nombre d'éléments d'une population va se stabiliser

Définition 4 *On dit qu'une suite* (u_n) *tend vers un nombre fini* L *si pour tout intervalle* I *centré sur* L *il existe un rang* N *à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle* I

On note cela $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$

Théorème 6 *Si une suite a une limite finie alors celle ci est unique*

Exemples

1. $(\frac{1}{n})$, $(\frac{1}{n^2})$,... tendent vers 0
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$
3. La suite (u_n) définie par récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$ avec $u_0 = 2$ tend vers $\sqrt{2}$

Opérations sur les limites finies

1. (somme)
2. (produit)

   Application $\lim_{n\to+\infty} 2(1 - \frac{1}{2^{n+1}}) = 2$
3. (quotient)

Opérations sur les limites

1. (somme)
2. (produit)

4 Verhulst (1836)