Langage matriciel Supposons que l'on ait m relations **linéaires** :

$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n$

$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n$

...

$x'_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n$

reliant n nombres $x_1, ..., x_n$ à m nombres $x'_1, ..., x'_m$ nous **traduisons** ces m égalités **en une seule égalité**

$$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ ... \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ...a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ...a_{2n} \\ ... & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ...a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ...a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ...a_{2n} \\ ... & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ...a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}}_{X}$ est le **produit** de la **matrice** A par le **vecteur colonne** X

La matrice $A = (a_{ij})$ caractérise la relation entre X' et X

Cette matrice a m lignes et n colonnes , i désigne le numéro de ligne et j désigne le numéro de colonnes. On dit que c'est une matrice $m \times n$

Exercice

1. Vérifier que $X' = x_1 a_{i1} + ...x_n a_{in}$ où a_{ij} est le j ième vecteur colonne composant la matrice A

   On retiendra que X' est une combinaison linéaire des vecteurs colonnes de A et les coefficients associés sont les coordonnées de X
2. On définit la transposée (a^T_{ij}) d'une matrice (a_{ij}) par $a^T_{ij} = a_{ji}$ par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

   Vérifier que les coordonnées de X' sont obtenues en faisant **le produit scalaire** des vecteurs colonnes de la transposée de A et du vecteur colonne X
3. Cas particulier $m = 1$ dans ce cas $x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n$ se traduit en langage vectoriel $X' = A^T.X$ où . désigne le produit scalaire
4. Vérifier (linéarité) que pour tout réel k on a $A(kX) = k(AX)$ et pour tout vecteur X et Y on a $A(X + Y) = A(X) + A(Y)$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$

Produit de matrices Dans l'écriture $X' = AX$ on peut regarder X et X' comme des matrices et non des vecteurs, d'où l'intérêt de définir le produit de matrices dans le cas général

Si $X'' = BX'$ où B est une matrice à p lignes et m colonnes, alors $X'' = B(AX) = (BA)X$

Exercice

1. Ecrire X'' comme une **combinaison linéaire** de vecteurs dont les coefficients sont x_1, x_2 et $...x_n$

   Vérifier que les vecteurs colonnes de cette combinaison sont les Ba_{ij} pour j variant de 1 à n

   Que vaut BA ?

2. En déduire la règle de Chasles si B est une matrice $p \times m$ et si A est une matrice $m \times n$ alors BA est une matrice $p \times n$

3. Vérifier cette règle sur le produit de la matrice A et du vecteur colonne vu comme une matrice X

4. Il existe une convention où les vecteurs sont disposés en **lignes** dans ce cas $X = \begin{pmatrix} x_1 & ... & x_n \end{pmatrix}$ est une matrice $1 \times n$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 & ... & x'_m \end{pmatrix}$ est une matrice $1 \times m$

   Comment traduire alors les m relations linéaires du début comme un produit de matrices $X' = ?$