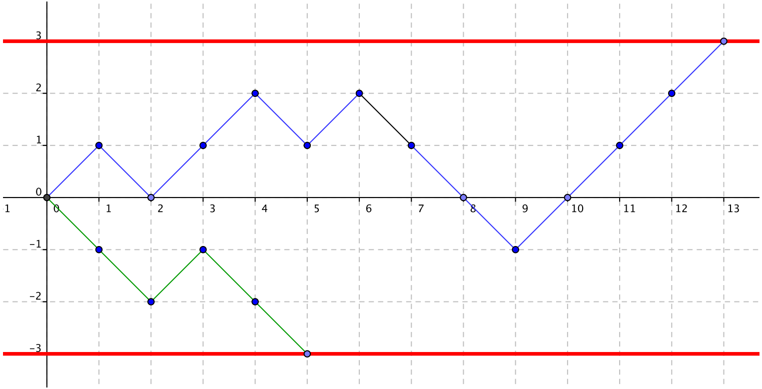
Exemple de marche aléatoire

Vallon

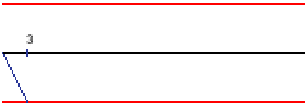
26 février 2015



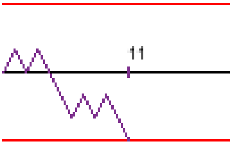
Imaginons un promeneur qui se déplace en partant de l'origine d'un repère de la manière suivante

- A chaque lancer d'une pièce équilibrée son abscisse augmente de 1
- S'il a fait pile son ordonnée augmente de 1, sinon elle diminue de 1
- La promenade s'arrête s'il touche un des deux murs placés à $y = 3$ ou à $y = -3$

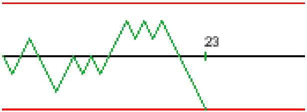
Trois exemples :



(a) marche 1

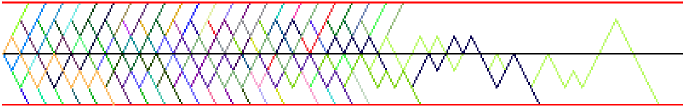


(b) marche 2



(c) marche 3

Mille marches :



Algorithme pour une marche :

Variables

x,y : nombres entiers

Traitement

```
x = 0 ; y = 0 ;
Tant que abs(y) != 3 {
Si pile alors y = y+1
Sinon y = y - 1
x = x+1 ;
}
afficher x ;
```

Algorithme pour n marches :

L'algorithme précédent est une fonction appelée marche() qui donne l'abscisse d'arrêt

Variables

i,somme,moyenne,n : nombre entier

Traitement

somme = 0 ;

Pour i = 1 jusqu'à n faire {

somme = somme + marche() ;

}

moyenne = somme /n ;

afficher moyenne ;

Voici quelques valeurs :
On note $\overline{X}_s$ la moyenne des abscisses d'arrêt obtenue pour n marches

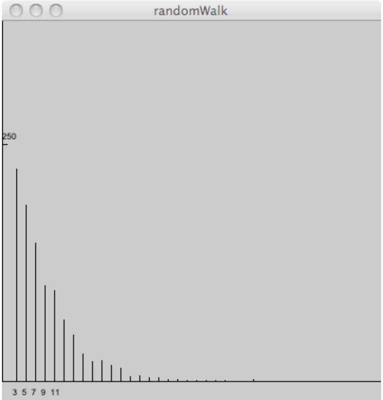
Nombre de marches	10	20	100	1000
$\overline{X}_s$	6,4	10,4	9,56	9,208

Echantillonnage pour n = 10

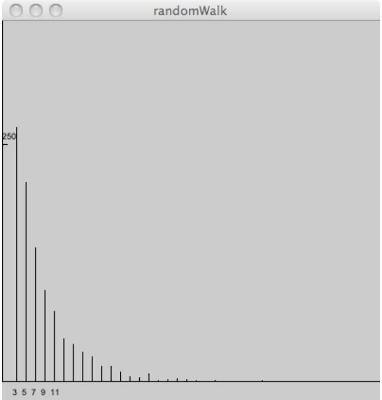
N° échantillon	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\overline{X}_s$	9	10,6	7	9,2	6,6	10,2	14,4	11,4	5,8	10,2

Echantillonnage pour n = 1000

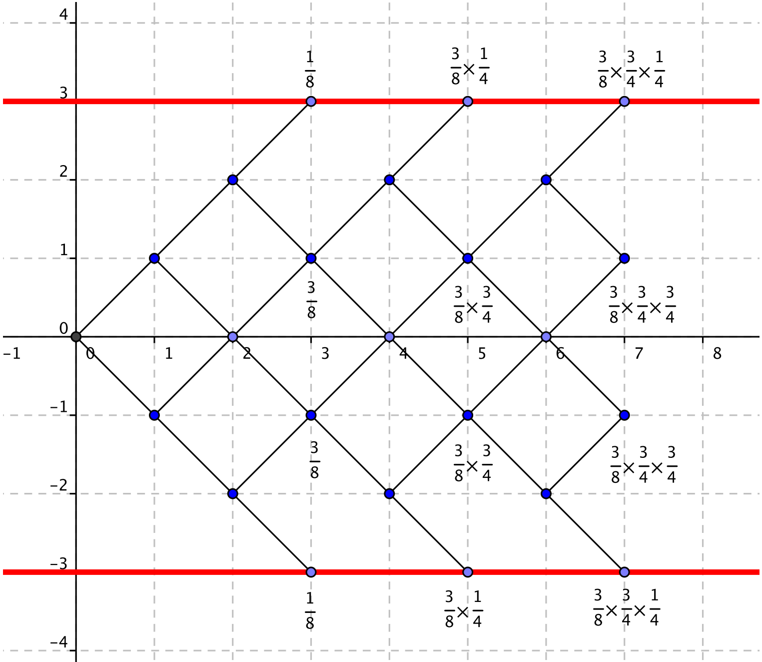
N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\overline{X}_s$	8,766	8,724	9,082	8,862	9,022	9,032	8,606	8,792	8,756



(d) histogramme1



(e) histogramme 2


$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}$
$\frac{3}{8}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}\times\frac{3}{4}$
$\frac{3}{8}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}\times\frac{3}{4}$
$\frac{3}{8}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}$
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}$
$\frac{3}{8}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}$

Théorème

Soit X la variable aléatoire égale à l'abscisse du promeneur lorsqu'il s'arrête.

- *Les valeurs de X sont les nombres impairs supérieurs ou égaux à 3*
- *La loi de probabilité de X est la suite géométrique de premier terme $\frac{1}{4}$ et de raison $\frac{3}{4}$*

Démonstration.

- D'après l'arbre pondéré ci-dessus on a $p_{2n+1} = \frac{3}{4} p_{2n-1}$ avec $p_3 = \frac{1}{4}$
- La somme des termes consécutifs de cette suite converge vers 1
- en effet $\frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3^2}{4^3} + \ldots + \frac{3^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1-(\frac{3}{4})^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}\right)$
- Lorsqu'on fait tendre n vers $+\infty$ la somme converge donc vers 1

Nous avons déjà prouvé le premier résultat ci-dessous, nous admettons les deux autres

- $1 + x + x^2 + ... + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k \to \frac{1}{1-x}$ si $|x| < 1$ lorsque $n \to +\infty$
- $1 + 2x + ... + nx^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} \to \frac{1}{(1-x)^2}$ si $|x| < 1$
- $2 + 3 \times 2x + ... + n(n-1)x^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2} \to \frac{2}{(1-x)^3}$ si $|x| < 1$

Théorème

- $E(X)$ *est la limite de la suite* $\frac{1}{4} \times 3 + \frac{3}{4^2} \times 5 + \ldots + \frac{3^{n-1}}{4^n} \times (2n+1)$
- $E(X) = 9$

Démonstration.

La suite ci-dessus peut s'écrire $\sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k-1}}{4^k}(2k+1) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(\frac{3}{4})^{k-1}(2k+1)$
On distribue à l'intérieur du signe somme et on obtient
$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k(\frac{3}{4})^{k-1} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(\frac{3}{4})^{k-1} \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1-\frac{3}{4})^2} + \frac{1}{4} \times 4 = 8 + 1 = 9$ □

Théorème

- $E(X^2)$ *est la limite de la suite* $\sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k-1}}{4^k}(2k+1)^2 \to 129$
- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 129 - 9^2 = 48$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{48}$

Démonstration.

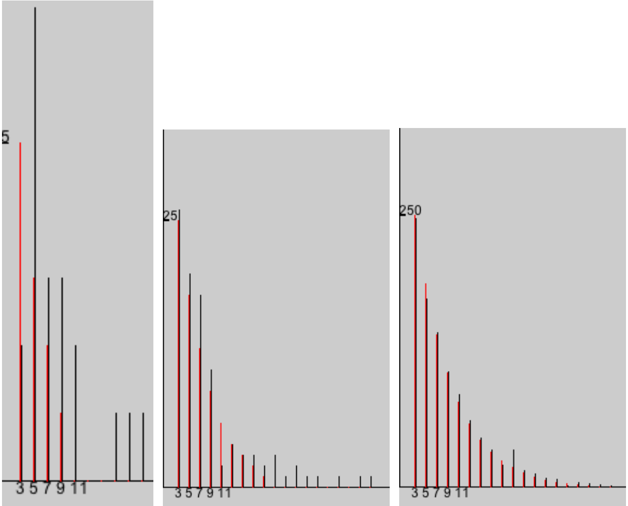
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k-1}}{4^k}(2k+1)^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(\frac{3}{4})^{k-1}(4k^2+4k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(\frac{3}{4})^{k-1} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(\frac{3}{4})^{k-1} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)(\frac{3}{4})^{k-2} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(\frac{3}{4})^{k-1}$$

$$\to \frac{2}{(1-\frac{3}{4})^3} + 1 = 129$$

$\square$

Ecart entre ce qui est prévu par la loi de Probabilité et la simulation



(f) 20 marches (g) 100 marches (h) 1000 marches

Plus le nombre de répétitions est élevé plus l'écart est moindre