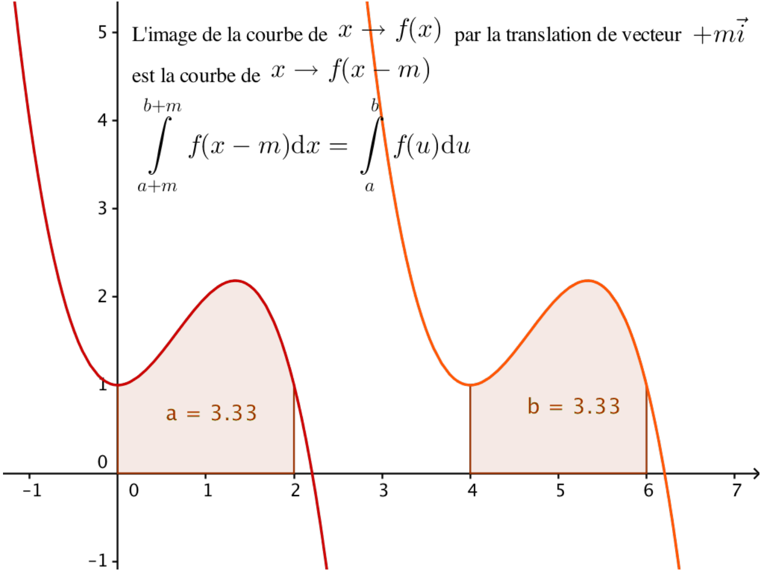
Lois normales

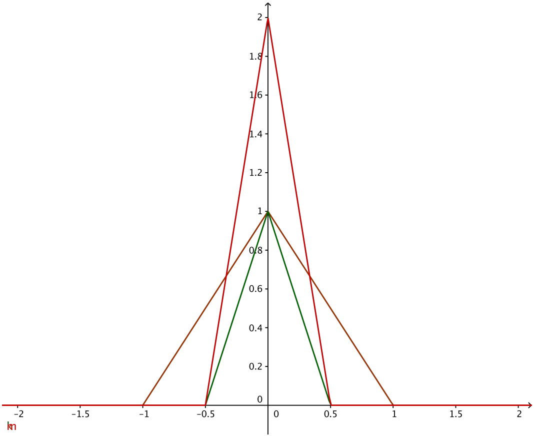
Vallon

18 avril 2017

L'image de la courbe de $x \to f(x)$ par la translation de vecteur $+m\vec{i}$ est la courbe de $x \to f(x-m)$

$$\int_{a+m}^{b+m} f(x-m)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(u)\mathrm{d}u$$





- f définie par $f(x) = 1_{[-1;0]}(x) \times (x+1) + 1_{[0;1]}(x) \times (-x+1)$ est une fonction de densité de probabilité (courbe marron)
- $x \to f(2x)$ n'en est pas une (courbe verte)
- Pour que l'aire sous la courbe reste invariante on fait $x \to 2f(2x)$ (courbe rouge)

Théorème

- *Pour tout* $m \in \mathbb{R}$
  $$\int_a^b f(x-m)\mathrm{d}x = \int_{a-m}^{b-m} f(u)\mathrm{d}u$$
- *Pour tout* $k \in \mathbb{R}^*$
  $$\int_a^b \frac{1}{k} f(\tfrac{x}{k})\mathrm{d}x = \int_{\frac{a}{k}}^{\frac{b}{k}} f(u)\mathrm{d}u$$

Démonstration.

- On pose $u = x - m$ on dérive u par rapport à x donc $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1$, on "assimile" $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ à une fraction donc $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ donc
  $f(x-m)\mathrm{d}x = f(u)\mathrm{d}u$
  Or si $a \leqslant x \leqslant b$ alors $a - m \leqslant x - m = u \leqslant b - m$ d'où la première égalité
- Même type de raisonnement avec $u = \dfrac{x}{k}$

Théorème

- *Pour tout* $k \in \mathbb{R}^*$ *et* m *réel*

$$\int_a^b \frac{1}{k} f\left(\frac{x-m}{k}\right)\mathrm{d}x = \int_{\frac{a-m}{k}}^{\frac{b-m}{k}} f(u)\mathrm{d}u$$

Théorème

- *Pour tout $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ la fonction $x \to f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$*
- *Elle définit la loi normale d'espérance m et d'écart-type σ , $\mathcal{N}(m; \sigma)$*

Démonstration.

- Voir le théorème précédent
- Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(m; \sigma)$ alors $E(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{t}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}t$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t-m}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}t + m \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}t$$

$$= \sigma \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t-m}{\sigma^2\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}t}_{=0} + m \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}t}_{=1} = m$$

□

Théorème

Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$ alors $T = \dfrac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite

Démonstration.

Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$ alors pour tout a et b réels on a

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{\sigma})^2} \mathrm{d}t$$

Ce qui signifie que si $a \leqslant x \leqslant b$ alors $\dfrac{a-m}{\sigma} \leqslant t = \dfrac{x-m}{\sigma} \leqslant \dfrac{b-m}{\sigma}$ donc par changement de variable

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{\sigma})^2} \mathrm{d}x = \int_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\frac{b-m}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} \mathrm{d}t$$

$= P(\frac{a-m}{\sigma} \leqslant T \leqslant \frac{b-m}{\sigma})$ où T suit la loi normale centrée réduite □

Théorème

Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$ alors :

- $P(|X-m| \leqslant \sigma) \simeq 0,68$
- $P(|X-m| \leqslant 2\sigma) \simeq 0,95$
- $P(|X-m| \leqslant 3\sigma) \simeq 0,997$