Loi normale centrée réduite

Vallon

17 avril 2017

- En 1713 paraît Ars conjectandi (art de la conjecture) de Jacob Bernoulli(1654-1705) mathématicien suisse
- Dans ce livre est formulée et prouvée la loi (faible) des grands nombres : "la fréquence moyenne d'apparition d'un résultat dans une répétition d'épreuves tend vers la probabilité d'observer cette apparition dans une épreuve"

- Une pièce étant donnée pour savoir quelle est la probabilité de faire face, je n'ai qu'à lancer "un grand nombre de fois" cette pièce et calculer la fréquence d'apparition de face et j'aurais une approximation de la probabilité p de faire face
- Modélisons le nombre de fois où on obtient face lorsqu'on lance n fois la pièce par une variable aléatoire S_n qui suit une loi binomiale de paramètres n et p
- Ici p est inconnue
- On modélise la fréquence d'apparition de face sur les n lancers par la variable aléatoire $F_n = \dfrac{S_n}{n}$

Théorème

Pour tout $\epsilon > 0$ *on a* $P(|\frac{S_n}{n} - p| \geqslant \epsilon)$ *tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini*

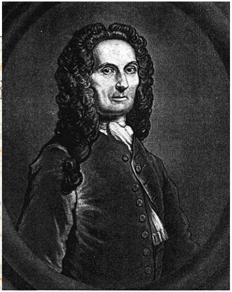
Démonstration.

On applique l'inégalité de Bienaymé-Chebychev à F_n pour tout $\epsilon > 0$ on a $P(|F_n - E(F_n)| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{V(F_n)}{\epsilon^2}$ or $E(F_n) = E(\frac{S_n}{n}) = \frac{E(S_n)}{n} = \frac{np}{p} = p$

Enfin $V(F_n) = V(\frac{S_n}{n}) = \frac{V(S_n)}{n^2} = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$

Donc $P(|F_n - p| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \to 0$ si $n \to +\infty$ $\square$

(a) Vitry-le-François



(b) De Moivre

- Abraham de Moivre est né à Vitry-le-François en 1667
- A l'âge de 18 ans, suite à la révocation de l'édit de Nantes, fuyant les persécutions, il émigre à Londres
- Rencontre Newton en 1692, puis Leibniz en 1693

- Abraham de Moivre (1667-1754), dans un livre La doctrine des chances, publié en 1718, montre que la variable aléatoire $Y_n = \dfrac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ où S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = \dfrac{1}{2}$, lorsque n tend vers l'infini a pour loi de probabilité une loi de densité $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$
- Il prouve aussi la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-n}$ ce qui signifie que
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-n}} = 1$$

- Laplace est né à Beaumont-en-Auge (Normandie) en 1749
- Laplace suit des études de Mathématiques à l'université de Caen entre 16 et 18 ans
- Travaille comme professeur à l'école militaire de Paris de 19 à 24 ans
- Membre de l'académie des sciences à 24 ans.
- Dans son livre Théorie analytique des probabilités, publié en 1812, généralise le théorème de De Moivre pour p quelconque
- Il meurt à Paris en 1827

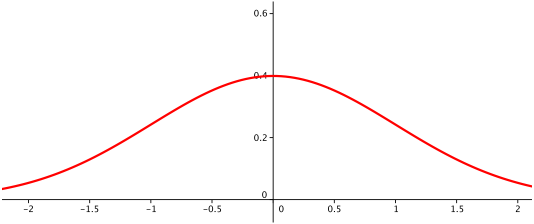
Théorème

Soit X *une variable aléatoire alors* $Y = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$, *la variable aléatoire centrée réduite a pour espérance* $E(Y) = 0$ *et pour variance 1*

Démonstration.

1. $E(X - E(X)) = E(X) - E(E(X)) = E(X) - E(X) = 0$
2. Rappel $V(X + k) = V(X)$ et $V(aX) = a^2 V(X)$ donc $V(Y) = V(\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}) = \dfrac{V(X - E(X))}{(\sigma(X))^2} = \dfrac{V(X)}{V(X)} = 1$

$\square$



Définition

T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$, suit la loi normale centrée réduite $N(0;1)$ d'espérance 0 et d'écart type 1 si sa loi de probabilité est définie par :

$P(a \leqslant T \leqslant b) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$

Théorème

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1$

- Il n'existe pas de primitive "simple" de $x \to \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$
- Il n'y a donc pas de formule littérale pour calculer $P(a \leqslant T \leqslant b)$
- Le calcul de $P(a \leqslant T \leqslant b)$ est un calcul numérique approché
- Il existe aussi des tables basées sur la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
- $F(t) = P(T \leqslant t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx$ est une primitive de $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

Théorème

- $P(a \leqslant T \leqslant b) = F(b) - F(a)$
- $F(-a) = 1 - F(a)$
- $P(-a \leqslant T \leqslant a) = 2F(a) - 1$

Démonstration.

Exercice □

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5348	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

$P(-1,5 \leqslant T \leqslant 2,2) = F(2,2) - F(-1,5) = F(2,2) - (1 - F(1,5)) =$
$0,9861 + 0,9332 - 1 = 0,9193$

Théorème

T suit la loi normale centrée réduite
Pour tout $\alpha \in]0;1[$ il existe un unique réel $u_\alpha > 0$ tel que
$P(-u_\alpha \leqslant T \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$

Démonstration.

$$P(-x \leqslant T \leqslant x) = 2F(x) - 1 = 1 - \alpha \text{ donc } F(x) = 1 - \frac{\alpha}{2} \text{ avec } x \geqslant 0$$

- F est continue sur $[0; +\infty[$
- $F(0) = 0,5$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Pour tout $\alpha \in]0;1[$, $1 - \dfrac{\alpha}{2}$ est une valeur intermédiaire entre 0,5 et 1, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $x > 0$ tel que $F(x) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$ et puisque F est strictement croissante , ce réel est unique , on le note u_α. Par exemple $u_{0,05} = 1,96$ et $u_{0,01} = 2,58$ □

Théorème

(Théorème de De Moivre-Laplace) Lorsque n *tend vers l'infini* $P(a \leqslant \dfrac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b)$ *tend vers* $P(a \leqslant T \leqslant b)$ *où* T *suit la loi normale* $N(0; 1)$

Démonstration.

Voir Exercice pour le cas $p = \dfrac{1}{2}$ $\square$