# Logarithme népérien

Vallon

4 janvier 2015

### Théorème

*Il existe une fonction, nommée logarithme népérien et notée* ln*,définie sur* $]0;+\infty[$*, telle que*
*Pour tout* $x$ *réel,* $e^x = y \iff x = \ln(y)$ *avec* $y > 0$

### Démonstration.

- Pour tout $y > 0$ la fonction $f$ définie par $f(x) = e^x - y$, est continue sur $\mathbb{R}$
- Si $x \to +\infty$ alors $f(x) \to +\infty > 0$
- Si $x \to -\infty$ alors $f(x) \to -y < 0$
- D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution
- $f'(x) = e^x > 0$ donc $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $f(x) = 0$ a une solution unique
- On a montré l'existence d'une fonction $y \to x$ telle que $e^x = y$

$\square$

- $\ln(1) = 0$ car $e^0 = 1$
- $\ln(e) = 1$ car $e^1 = e$
- $\ln(e^x) = x$
- $e^{\ln(x)} = x$

### Théorème

- *Pour tout* $x > 0$ *et tout* $y > 0$ *on a* $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- *Pour tout* $x > 0$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $\ln(x^n) = n\ln(x)$
- *Pour tout* $x > 0$ *on a* $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$
- *Pour tout* $x > 0$ *et tout* $y > 0$ *on a* $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$

### Démonstration.

- $e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x)}e^{\ln(y)} = xy = e^{\ln(xy)}$ et puisque la fonction exponentielle est strictement croissante $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- Par récurrence sur $n$
- $\ln(x \times \frac{1}{x}) = \ln(1) = 0$ Or $\ln(x \times \frac{1}{x}) = \ln(x) + \ln(\frac{1}{x})$
  Donc $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$

$\square$

## Théorème

- $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$

## Démonstration.

- Pour tout $A > 0$ quelque soit $x \geqslant e^A$ on a $\ln(x) \geqslant \ln(e^A) = A$ ce qui prouve $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- Si $x \to 0^+$ alors $X = \dfrac{1}{x} \to +\infty$ et $\ln(X) \to +\infty$

  Or $\ln(X) = \ln(\dfrac{1}{x}) = -\ln(x)$ donc $\ln(x) = -\ln(X) \to -\infty$

$\square$

## Théorème

*La fonction logarithme népérien est dérivable sur* $]0;+\infty[$ *et sa fonction dérivée est la fonction inverse définie sur* $]0;+\infty[$

## Démonstration.

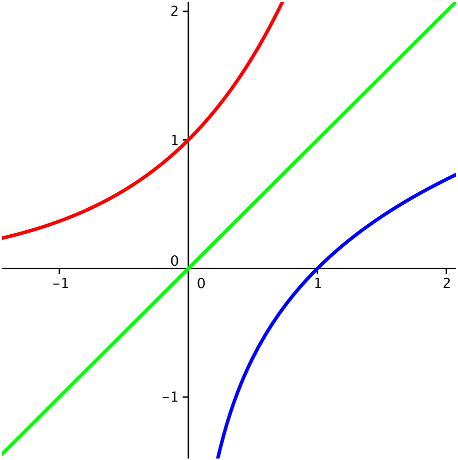
On admet la dérivabilité de la fonction logarithme népérien sur $]0;+\infty[$
En composant le fonction ln et la fonction exponentielle ,
$x \to e^x = y \to \ln(y) = \ln(e^x) = x$
En utilisant le théorème de la dérivée d'une fonction composée
$(\ln \text{ o } exp)'(\text{x}) = \ln'(e^x)e^x$
Donc $1 = \ln'(e^x)e^x$ donc $\ln'(y) = \dfrac{1}{y}$ $\square$

Théorème

*La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur* $]0;+\infty[$

Démonstration.

$\ln'(y) = \dfrac{1}{y} > 0$ donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ $\square$


2
1
0
−1
−1
0
1
2