Logarithme népérien. Logarithmes

EX N°1

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\ln(e\sqrt{e})$
2. $\ln((\frac{1}{e})^2)$
3. $\sum\limits_{k=1}^{k=2015} \ln(\frac{k}{k+1})$

EX N°2

Préciser l'ensemble des nombres réels x pour lesquels l'égalité est vraie :

1. $\ln(x^2-1) = \ln(x-1) + \ln(x+1)$
2. $\ln(\frac{x-1}{x+1}) = \ln(x-1) - \ln(x+1)$

EX N°3

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

1. $\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln(3)$
2. $\ln(x-2) - \ln(x-3) = 1$

EX N°4

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

1. Résoudre $X^2 - X - 6 = 0$
2. En déduire les solutions de $(\ln(x))^2 - \ln(x) - 6 = 0$
3. En déduire les solutions de $e^x - 1 - 6e^{-x} = 0$

EX N°5

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$

1. $\ln(x+3) < 2\ln(x+1)$
2. $\ln(x+e) + \ln(x-e) \leqslant 2 + \ln(3)$

EX N°6

Déterminer à chaque fois la plus petite valeur de n entière telle que

1. $\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-6}$
2. $1 - (\frac{5}{6})^n \geqslant 0,5$

EX N°7

On lance n fois deux dés . A partir de quelle valeur de n est il préférable de parier sur l'évènement A : " Obtenir au moins un double six " au lieu de $\overline{A}$?

EX N°8

1. Démontrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$ on a $\dfrac{x-1}{x} \leqslant \ln(x+1) \leqslant x$
2. Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$ on a $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(x+1) \leqslant x$
3. Interprétation géométrique

EX N°9

Calculer les limites des fonctions suivantes aux bornes de leur domaine de définition

1. $x \to \ln(x) + x$
2. $x \to \ln(x) - x$
3. $x \to x\ln(x)$
4. $x \to \dfrac{\ln(x)}{x}$
5. $x \to \ln(x) + \dfrac{1}{x}$
6. $x \to \ln(1-x)$
7. $x \to \ln(\dfrac{x-1}{x+1})$

EX N°10

Montrer que la fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^2(\ln(x) - 1)$ si $x > 0$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

EX N°11

Pour chacune des fonctions précédentes (1 à 6), étudier leur dérivabilité et calculer leur fonction dérivée

EX N°12

1. Quelle propriété mathématique permet de justifier l'existence d'une fonction ϕ définie sur un voisinage de 0 telle que :
   $\ln(1+x) = x + x\phi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \phi(x) = 0$?
2. Calculer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = (1 + \dfrac{1}{n})^n$ de deux manières (l'une en utilisant la question précédente, l'autre en utilisant l'encadrement de l'exercice 8 -2)

EX N°12

1. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $\ln(x) \leqslant x - 1$ (partir de l'exercice 8)
2. Soit $(p_1, p_2, ..., p_n)$ et $(q_1, q_2, ..., q_n)$ deux lois de probabilités discrètes
   Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{k=n} p_k \ln(\dfrac{q_k}{p_k}) \leqslant 0$
3. On définit le logarithme de base 2 par $\ln_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$. Avec les mêmes conditions que précédemment en déduire $\sum\limits_{k=1}^{k=n} p_k \ln_2(\dfrac{q_k}{p_k}) \leqslant 0$

EX N°13

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)^3}{(x^2+x+1)^2}$

1. A quelle condition peut on calculer $\ln(f(x))$?
2. Sous cette condition simplifier $\ln(f(x))$
3. Calculer la fonction dérivée de $\ln(f)$ appelée la dérivée logarithmique de f ?
4. En déduire la dérivée de f

EX N°13

1. Sur quel intervalle I est définie f par $f(x) = \ln(\ln(x))$
2. Etudier les variations de f sur I
3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$

EX N°14

Soit f_n la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} + n\ln(x)$ où n est un entier naturel

1. Montrer que la fonction g_n définie sur $[0; +\infty[$ par $g_n(x) = (x-1)e^x + nx + 1$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et que pour tout $x > 0$ on a $g_n(x) > 0$
2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $f'_n(x) = \dfrac{g_n(x)}{x^2}$
3. En déduire les variations de f_n sur $]0; +\infty[$
4. Déterminer les variations de f_n en 0 et en $+\infty$
5. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ il existe un unique nombre réel α_n de l'intervalle $]0; 1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$
6. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a $f_{n+1}(\alpha_n) = \ln(\alpha_n)$
7. En déduire que (α_n) est une suite croissante et ensuite qu'elle converge
8. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\alpha_n \geqslant e^{\frac{1-e}{n}}$ (Utiliser que $\dfrac{e^x - 1}{x} \leqslant e - 1$ sur $]0\,;1]$)
9. En déduire la limite de (α_n)

EX N°15

Soit g définie sur $]0;1[$ par $g(x) = x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) + wx(1-x)$ où w est un réel

1. Déterminer le domaine de définition D_g de g
2. Calculer les limites aux bornes du domaine
3. Pour tout $x \in D_g$ calculer $g(1-x)$. Que peut on en déduire pour C_g ?
4. Etudier les variations de g et donner l'allure de C_g lorsque $w = 0$

EX N°16

1. Combien y-a-t-il d'entiers appartenant à l'intervalle $[1;10^2]$ s'écrivant comme une puissance de 2 ?(comptage "à la main")
2. Justifier que le nombre d'entiers appartenant à $[1;A]$ s'écrivant comme une puissance de 2 est $E(\frac{\ln(A)}{\ln(2)}) + 1$
3. Si on tire un entier de $[1;A]$ au hasard, quelle est la probabilité de tomber sur une puissance de 2 ?
4. Maintenant on s'intéresse aux nombres entiers de la forme $2^\alpha 3^\beta$ appartenant à l'intervalle $[1;10^2]$. Combien y-en -a-t-il ?(Faire un arbre)
5. Montrer qu'un majorant des entiers de la forme $2^\alpha 3^\beta$ appartenant à l'intervalle $[1;A]$ vaut $(\dfrac{\ln(A)}{\ln(2)} + 1)(\dfrac{\ln(A)}{\ln(3)} + 1)$
6. On veut mieux estimer ce nombre
   (a) pour chaque $k \in E(\frac{\ln(A)}{\ln(2)}) + 1$ justifier que le nombre de $2^k 3^\beta$ appartenant à $[1;A]$ est précisément $E(\frac{\ln(\frac{A}{2^k})}{\ln(3)}) + 1$
   (b) En déduire que le nombre exact de facteurs $2^\alpha 3^\beta$ appartenant à l'intervalle $[1;A]$ est alors $N = \sum_{k=0}^{m} E(\frac{\ln(\frac{A}{2^k})}{\ln(3)}) + 1$ où $m = E(\frac{\ln(A)}{\ln(2)}) + 1$
   (c) On veut minorer N. Justifier que $N \geqslant \sum_{k=0}^{m} \frac{\ln(\frac{A}{2^k})}{\ln(3)} = \frac{1}{\ln(3)} \times \ln(\frac{A^{m+1}}{2^{\frac{m(m+1)}{2}}})$
   (d) Montrer que $\frac{A^{m+1}}{2^{\frac{m(m+1)}{2}}} \geqslant A^{\frac{m+1}{2}}$ (utiliser le fait que $2^m \leqslant A \leqslant 2^{m+1}$)
   (e) En déduire $N \geqslant \dfrac{(m+1)\ln(A)}{2\ln(3)}$
   (f) En déduire $N \geqslant \dfrac{(\ln(A))^2}{2\ln(2)\ln(3)}$
7. En déduire un encadrement de la probabilité de tomber sur un nombre $2^\alpha 3^\beta$ appartenant à l'intervalle $[1;A]$ si on tire au hasard un nombre entier de l'intervalle $[1;A]$

EX N°17

On définit le logarithme de base 2 sur $]0;+\infty[$ par $\ln_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\ln_2(2^n) = n$
2. Une source d'information est constituée du couple (S, P) où $S = (s_1, s_2, ..., s_n)$ est l'alphabet source et $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ est l'ensemble des probabilités p_i d'occurence de s_i dans une émission

   Par exemple S est l'alphabet de la langue française et P la probabilité associée

   L'entropie d'une source S est définie par $H(S) = -\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \ln_2(p_i)$

   Pourquoi le signe moins ?

   L'entropie est le nombre de bits minimum pour coder l'alphabet d'une source
3. Soit (S, P) avec $q_i = \dfrac{1}{n}$ (équiprobabilité) Calculer $H(S)$

   Calculer $H(S)$ pour une source ayant un alphabet de 27 caractères équiprobables
4. Soit (S, P) quelconque alors $0 \leqslant H(S) \leqslant \ln_2(n)$

   (Utiliser $\sum\limits_{k=1}^{k=n} p_k \ln_2(\dfrac{q_k}{p_k}) \leqslant 0$ avec $q_i = \dfrac{1}{n}$)
5. Quelle est l'entropie d'une source qui émet un caractère 1 avec une probabilité 0,1 et un caractère 0 avec une probabilité 0,9 ? Pourquoi l'entropie est une "mesure du désordre" ?(Considérer une image vérifiant la contrainte précédente avec $1 =$ noir et $0 =$ blanc et comparer avec une autre image où les deux probabilités valent 0,5)

EX N°18

Le logarithme décimal ou de base 10 est défini par $\ln_{10}(x) = \log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$

En chimie on définit le PH (potentiel hydrogène) d'une solution aqueuse par

$$PH = -\log([H_3O^+])$$

1. Pourquoi peut on définir la réciproque de $x \to \log(x)$ par $x \to 10^x$?Exprimer $[H_3O^+]$ en fonction du PH
2. Calculer le PH d'une solution aqueuse tel que $[H_3O^+] = 0,02$ mol /l
3. Quelle est la concentration en ions H_3O^+ sachant que le PH vaut 12,6 ?