# Limites de fonctions à l'infini

**EX N°1** Soit $f$ la fonction carrée

1. Trouver $S_{1000}$ tel que pour tout $x > S_{1000}$ on a $f(x) > 1000$
2. Trouver $S_{10^6}$ tel que pour tout $x > S_{10^6}$ on a $f(x) > 10^6$
3. Trouver $S_{10^n}$ tel que pour tout $x > S_{10^n}$ on a $f(x) > 10^n$
4. Plus généralement Pour tout $A > 0$ existe -t-il $S$ tel que pour tout $x > S$ on ait $f(x) > A$ ?
5. Qu'a-t-on démontré ?

**EX N°2**

Démontrer à l'aide de la définition que $f$ définie par :

1. $f(x) = \sqrt{x}$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$
2. $f(x) = x^2$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to -\infty$
3. $f(x) = x^3$ tend vers $-\infty$ lorsque $x \to -\infty$
4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$

**EX N°3**

1. Comment justifier que $3x + \sqrt{x} - 5$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$, en utilisant la définition ou des théorèmes ?
2. Comment justifier que $3 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{5}{x}$ tend vers 3 lorsque $x \to +\infty$, en utilisant la définition ou des théorèmes ?
3. Comment justifier que $3x - \sqrt{x} - 5$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$, en utilisant la définition ou des théorèmes ?

**EX N°4**

Etudier les limites des fonctions suivantes en $+\infty$

1. $x \to -2x^4 + 3x - 5$
2. $x \to -2x^4 + 3\sqrt{x} - 5$
3. $x \to -2x^4 - 3x - \dfrac{5}{x}$
4. $x \to -2x^4 + 3x - \dfrac{5}{x}$

**EX N°5**

Etudier les limites des fonctions suivantes en $+\infty$

1. $x \to \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x - 10^{10^{100}}}$
2. $x \to \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{4x^2 - 10^{10^{100}}}$
3. $x \to \dfrac{2x - 3\sqrt{x} + 1}{x^2 - 10^{10^{100}}}$

**EX N°6**

Etudier les limites des fonctions suivantes en $+\infty$

1. $x \to \dfrac{\sqrt{4x^2 - x + 3}}{x - 1}$
2. $x \to \dfrac{\sqrt{4x^2 - x + 3} - x}{x - 1}$
3. $x \to \dfrac{\sqrt{4x^2 - x + 3} - 2x}{x - 1}$
4. $x \to \dfrac{\sqrt{4x^2 - x + 3} - 2x}{(\sqrt{x} - 1)^2}$

**EX N°7**

Vrai ou faux ?(Si c'est vrai le justifier sinon donner un contre-exemple)

1. si $f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$
2. Si $f$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
3. Toute fonction a une limite en $+\infty$

**EX N°8**

1. Tracer à l'aide de la calculatrice la courbe représentative de la fonction $x \to 2x + \cos(x)$. Conjecturer le comportement à l'infini de cette fonction puis le prouver
2. Tracer à l'aide de la calculatrice la courbe représentative de la fonction $x \to \dfrac{\sin(x)}{x}$.Conjecturer le comportement à l'infini de cette fonction puis le prouver

**EX N°9**

Vrai ou faux ?

1. $f$ est une fonction définie sur $[0; +\infty[$ telle que pour tout $x \geqslant 0$ on a $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$
2. $f$ est une fonction définie sur $[0; +\infty[$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
3. $f$ est une fonction définie sur $[0; +\infty[$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ alors il existe $a \in [1; +\infty[$ tel que pour tout $x > a$ on a $f(x) = g(x)$

**EX N°10**

Soit $f$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sin(\frac{1}{x})$. On décompose $f$ ainsi :

$x \to \frac{1}{x} = y \to \sin(y)$.

Décomposer les fonctions suivantes

1. $x \to \sin(ax+b)$
2. $x \to \cos(ax+b)$
3. $x \to \sqrt{ax+b}$

**EX N°12**(*)

$f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

Si $x \in [0;2]$ $f(x)=x^2(2-x)$

Pour tout $x$ réel $f(x+2)=f(x)$

La fonction a-t-elle une limite en $+\infty$ ?

**EX N°13**

On dit que $C_f$, la courbe représentative d'une fonction $f$ admet pour asymptote à l'infini la courbe représentative $C_g$ de la fonction g si $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=0$

1. Montrer que la courbe représentative $C_f$ de la fonction $f$ définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=2+\frac{1}{x+1}$ a pour asymptote horizontale la droite d'équation $y=2$
2. Trouver l'asymptote de la courbe de la fonction $x \to \frac{\sin(x)}{x}$
3. Montrer que la courbe représentative $C_f$ de la fonction $f$ définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=2x+1+\frac{1}{x+1}$ a pour asymptote oblique la droite d'équation $y=2x+1$
4. Ecrire $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ (fonction homographique) sous la forme $f(x)=A+\frac{B}{cx+d}$. Est ce toujours possible ? Quand c'est possible en déduire l'existence d'une asymptote pour $C_f$ à l'infini

**EX N°14**

Quelle est la différence entre une asymptote horizontale ou oblique et une tangente ?

Les deux notions ont besoin d'un calcul de limite pour être définies cependant la tangente est construite de telle sorte qu'elle touche la courbe en un point de la courbe alors que l'asymptote ne touche pas la courbe à priori

1. Tracer la tangente à la courbe représentative $C_f$ de la fonction $f$ définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=2+\frac{1}{x+1}$ au point d'abscisse $x=1$ et $x=4$
2. Déterminer le tableau de variations de $f$ sur $]0;+\infty[$
3. Tracer l'asymptote horizontale $D$ à $C_f$
4. Avec l'aide des tangentes et de l'asymptote tracer $C_f$ sur $[1;+\infty[$