EXERCICES - Limites de suites

Ex 1

Application des théorèmes du cours :
Justifier :

1. $(\frac{1}{n}+2)$ converge vers 2
2. $(\frac{3n-2}{n+1})$ converge vers 3
3. $(\frac{(-1)^n}{n})$ converge vers 0
4. $(\frac{(-1)^n \sin(n)}{n})$ converge vers 0

Ex 2

Démontrer que les suites suivantes sont convergentes :

1. $u_n = \sqrt{u_{n-1}+3}$ avec $u_0 = 1$
2. $u_n = 1 - \frac{1}{u_{n-1}+1}$ avec $u_0 = 1$

Ex 3

Démontrer que toute suite convergente est bornée. La réciproque est elle vraie ?

Ex 4

(u_n) une suite à termes positifs et (v_n) la suite définie par :

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$$

Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse et justifier la réponse

1. Si (u_n) converge alors (v_n) converge
2. Si la suite (u_n) est croissante alors (v_n) l'est aussi
3. Si (v_n) converge alors (u_n) converge

Ex 5

Déterminer les limites éventuelles des suites (u_n) suivantes

1. $u_n = n^2 + 4n$
2. $u_n = n^2 + \frac{1}{n}$
3. $u_n = n^2 - 4n$
4. $u_n = (1 - \frac{1}{n})(n+1)$
5. $u_n = (4 + \frac{1}{n})^5$
6. $u_n = \frac{1-n^2}{n-2})$
7. $u_n = \frac{1-n^2}{n^2-2n-3}$

8. $u_n = \dfrac{1-n^2}{n^3-2n+5}$
9. $u_n = 4^n - 2^n$
10. $u_n = \dfrac{5^n+3^n}{4^n}$
11. $u_n = 1 + \dfrac{3}{4} + (\dfrac{3}{4})^2 + ... + (\dfrac{3}{4})^n$

Ex 6
Démontrer qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$
Ex 7

1. majorer et minorer $\dfrac{n}{n^2+1}$, de même pour $\dfrac{n}{n^2+2}$ de même pour $\dfrac{n}{n^2+3}$
2. En déduire un encadrement de la somme $\dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \dfrac{n}{n^2+3}$
3. En déduire un encadrement de la somme $\dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + ... + \dfrac{n}{n^2+n}$
4. Un autre problème : encadrer $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{3n+1}$

Ex 8

1. Minorer $\sqrt{n^2+1}$ et en déduire que la suite de terme général égal à $\sqrt{n^2+1}$ tend vers $+\infty$
2. En déduire que $u_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}$ converge vers 0

Ex 9
Soit $u_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + ... + \dfrac{n}{n^2+n}$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$
2. En déduire que (u_n) converge

Ex 10
Soit $u_n = \dfrac{\sin(1)}{n^2} + \dfrac{\sin(2)}{n^2} + ... + \dfrac{\sin(n)}{n^2}$
Encadrer (u_n) et en déduire que (u_n) converge
Ex 11

1. Justifier que :Si (u_n) converge alors $v_n = u_{n+1} - u_n$ converge vers 0
2. La réciproque est elle vraie ?

Ex 12
Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs telle que $u_0 = 1$ et telle que pour tout entier $n \geqslant 1$ au moins la moitié des termes u_0, u_1, ...,u_{n-1} soient supérieurs ou égaux à $2u_n$. Montrer que (u_n) tend vers 0