Limites d'une fonction en un point :

Continuité et dérivabilité

EX N°1

Calculer les limites en a de :

1. $x \to \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}$ avec $a = 1$
2. $x \to \dfrac{x^3 - x^2 + x + 1}{x - 1}$ avec $a = 1^+$ et $a = 1^-$

EX N°2

Soit f la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 2}$

1. Calculer la limite de f lorsque x tend vers 2^+
2. Que peut on en déduire pour la courbe représentative de f ?

EX N°3

$n \in \mathbb{Z}$

La fonction partie entière notée E est définie par $E(x) = n$ pour tout $x \in [n; n+1[$

1. Que vaut $E(1,5)$ et $E(-1,5)$?
2. Tracer la courbe représentative de E sur $[-3; 3]$
3. Etudier la continuité de E sur $[-3; 3]$

EX N°4

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\sin(\dfrac{1}{x})$ a une limite en 0
2. Prolonger f par continuité en 0 (prolonger une fonction f par continuité en 0 c'est définir une nouvelle fonction $\overline{f}$ telle que $\overline{f} = f$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\overline{f}(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$
3. Est ce que $\overline{f}$ est dérivable en 0 ?

EX N°5

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^{-*}$ par $f(x) = -x^2$ et sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x + a$ avec $a \in \mathbb{R}$

Pour quelle valeur de a la fonction f est continue en 0 ?

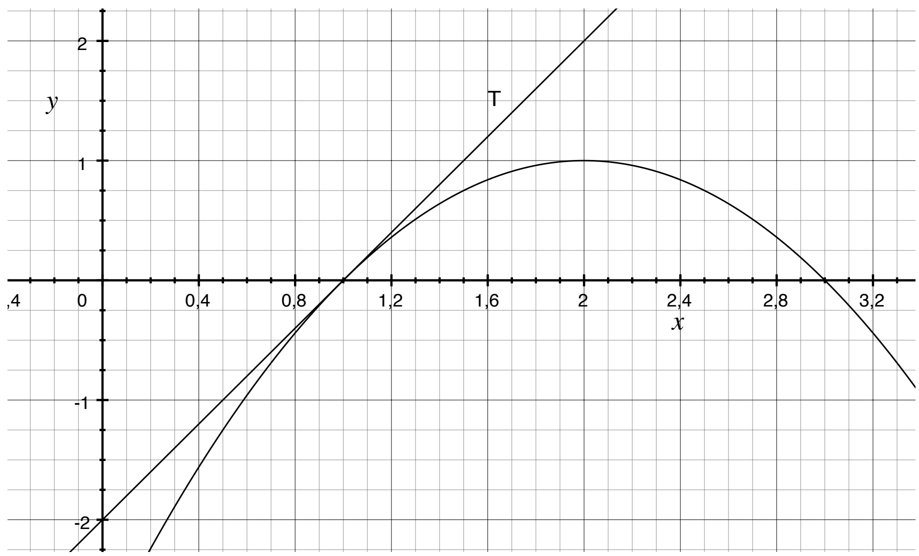
EX N°6

1. Rappeler la définition de la dérivabilité d'une fonction en 0
2. Est ce que la fonction $x \to |x|$ est dérivable en 0 ?
3. Tracer avec l'aide de la calculatrice la courbe représentative de $x \to |x|\sin(x)$. Que pensez vous de la dérivabilité de cette fonction en 0 ?
4. Etudier par le calcul la dérivabilité de cette fonction en 0 ?
5. De quelle propriété (fausse) cette fonction est le contre-exemple ?

EX N°7

Etudier la dérivabilité en 2 de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x + 2$ sur $[2; +\infty[$ et par $f(x) = x^2 - 6x + 10$ sur $]-\infty; 2[$

EX N°8



La courbe ci-dessus représente une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-2)^2 + b$

T est la tangente à la courbe au point d'abscisse 1

1. Lire graphiquement $f(1)$, $f'(1)$, $f(2)$ et $f'(2)$.
2. En déduire b
3. Calculer la fonction dérivée de f en fonction de a et b. En déduire $f'(1)$ par le calcul
4. En déduire a

EX N°9

Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

1. Calculer en fonction de a et b la fonction dérivée de f
2. Soit C et D deux points de la courbe représentative C_f d'abscisses respectives c et d. Calculer l'équation de la droite (CD)
3. Soit I le milieu de $[CD]$. Calculer l'équation de la tangente T_I à C_f au point d'abscisse x_I
4. En déduire que T_I et (CD) sont parallèles

EX N°10

Déterminer la fonction dérivée de la fonction définie et dérivable sur I

1. $f(x) = (2x+1)\sqrt{x}$ avec $I = \mathbb{R}^{+*}$
2. $f(x) = (2x+1)^5$ avec $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2+4x}$ avec $I = [0; +\infty[$

EX N°11

Aux quatre coins d' une plaque carrée de côté L , on enlève 4 carrés de côtés x , ensuite on plie les bords obtenus afin d'avoir une boîte parallélépipèdique

1. Exprimer en fonction de L et de x le volume V de la boîte
2. On étudie V en fonction de x. Quel est le domaine de définition de V
3. Pour quelle valeur de x, V est maximal ?

EX N°12

QCM : (Une seule réponse juste)

f est une fonction dérivable en un point d'abscisse a avec $f(a) \neq 0$ et $f'(a) \neq 0$. Le point d'intersection de la tangente à la courbe représentative de f et de l'axe des abscisses a pour abscisse :

a) $a - \dfrac{f'(a)}{f(a)}$ b) $a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$ c) $\dfrac{f(a)}{f'(a)} - a$ d) $a + \dfrac{f'(a)}{f(a)}$

EX N°13

Vrai ou faux :

1. Si f est dérivable en a alors f est continue en a
2. Si f est continue en a alors f est dérivable en a
3. Si f est dérivable en a alors $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+3h) - f(a)}{h} = f'(a)$
4. Si f est dérivable en a alors $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)$
5. Si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ existe et vaut l alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$

EX N°14

En admettant que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$ calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{\sin(3x)}$

EX N°15

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 \sin(\dfrac{1}{x})$ a une limite en 0
2. Prolonger f par continuité en 0 en une fonction $\overline{f}$
3. Montrer que $\overline{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$?
4. Est ce que $\overline{f}$ est continue en 0 ?

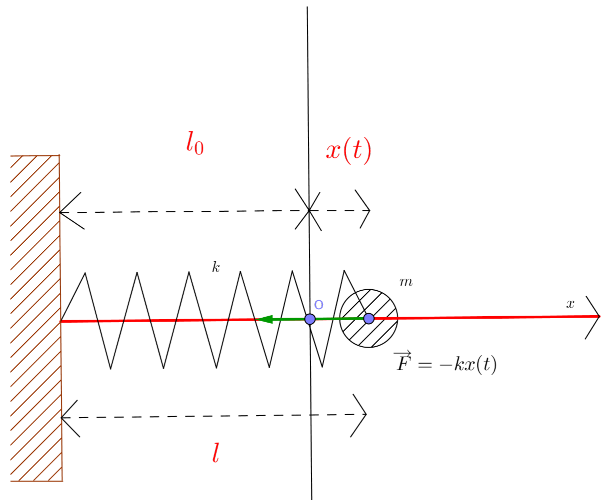
EX N°16

On cherche une relation entre la vitesse d'éjection d'un bouchon de champagne v_0 et la hauteur maximale atteinte par ce bouchon h

On assimile le bouchon à un point B qui se déplace verticalement sur un axe $(O; \vec{i})$. Ce point est repéré sur cet axe par $\overrightarrow{OB} = x(t)\vec{i}$. A l'instant initial $(t = 0)$ on a $x'(0) = v_0$ et $x(0) = 0$. Pour simplifier on considère que le bouchon n'est soumis qu'à son poids $\overrightarrow{P} = m\vec{g}$, où $\vec{g}$ et $\vec{i}$ sont de sens opposés

1. Ecrire le principe fondamental de la dynamique dans le repère $(O;\vec{i})$ supposé galiléen et vérifier que $x"(t) = -g$
2. En déduire $x'(t)$ puis $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales
3. A quel instant $t = t_A$, $x'(t)$ change de signe ? A quoi cela correspond physiquement ?
4. Que vaut $x(t_A)$? En déduire que $v_0 = \sqrt{2gh}$
5. Application numérique : $v_0 = 16$ m/s on prendra $g = 9,81\ m/s^2$. Calculer h

EX N°17



Un ressort de constante de raideur $k > 0$ de longueur au repos l_0 peut être étiré ou comprimé sur un axe perpendiculaire à la verticale du lieu, sur une longueur $l(t)$, où t est le temps mesuré par l'observateur. A l'extrémité du ressort se trouve une masse m. On suppose qu'au cours du déplacement cette masse n'est soumise qu'à la force $\overrightarrow{F} = -kx(t)$ avec $x(t) = l(t) - l_0$. A l'instant initial $t = 0$ on a $x(0) = A > 0$.(Physiquement , que cela signifie-t-il ?)

1. Ecrire le principe fondamental de la dynamique dans le repère Ox supposé galiléen et vérifier que $x"(t) = -\dfrac{k}{m}x(t)$ avec $x(0) = A > 0$
2. On pose $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ Vérifier que toute fonction $f(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ est solution de $x"(t) = -\dfrac{k}{m}x(t)$

   On retiendra qu'une primitive de $t \to \cos(\omega t)$ est $t \to \dfrac{\sin(\omega t)}{\omega}$ et qu'une primitive de $t \to \sin(\omega t)$ est $t \to -\dfrac{\cos(\omega t)}{\omega}$
3. En tenant compte de la condition initiale à $t = 0$ vérifier que LA solution est $x(t) = A\cos(\omega t)$. Cette modélisation est elle réaliste ?

EX N°19 *

Soit f définie et croissante sur $]0;+\infty[$ et telle que $x \to \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante sur $]0;+\infty[$ alors f est continue sur $]0;+\infty[$

EX N°20 *

Soit f définie sur $[0;1]$ par :

Pour tout $x \in \mathbb{Q} \cap [0;1]$ il existe a et b entiers naturels tel que $x = \dfrac{a}{b}$ et cette fraction est irréductible et $f(x) = \dfrac{1}{q}$

Pour tout $x \notin \mathbb{Q} \cap [0;1]$ on a $f(x) = 0$

On veut montrer que cette fonction n'admet pas de limite en tout point rationnel (donc n'est pas continue en tout nombre rationnel) et est continue en tout nombre irrationnel.

Pour cela on utilisera **la caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite pour une fonction**

1. Montrer que f n'a pas de limite en $\dfrac{1}{2}$ en utilisant deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent vers $\dfrac{1}{2}$:
   $u_n = \dfrac{1}{2}$ et $v_n = \dfrac{1}{2} + (\dfrac{\sqrt{2}}{2})^{2n+1}$, pour tout n
2. Montrer que si $x \to \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ alors $f(x) \to 0$ (Soit (u_n) une suite quelconque qui converge vers $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ montrer que $(f(u_n))$ converge vers 0. Envisager au moins le cas où (u_n) est une suite de rationnels $(\dfrac{a_n}{b_n})$ que pensez vous de $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$?)
3. Etudier la dérivabilité de f

EX N°21 *

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xE(\dfrac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

Etudier la continuité de f

EX N°22 *

Soient n et m deux entiers naturels tels que $n < m$

A tout élément x de $[0;1[$ on associe le nombre $f(x)$ obtenu par la permutation de la n-ième et la m-ième décimale de x

Etudier la continuité de f