Limites de suites

EX N°1

Une suite (u_n) *converge* vers un nombre réel l si :

pour tout intervalle ouvert J centré sur la limite l,*il existe un* rang à partir duquel *tous* les termes de la suite sont dans l'intervalle J

Cette définition est ensuite mise sous une forme plus pratique :

pour tout réel $r > 0$ (voir r comme un rayon),*il existe un* rang N entier à partir duquel *tous* les termes de la suite u_k sont dans l'intervalle $]l - r; l + r[$

Pour renforcer le côté technique, l'usage est d'user des symboles $\forall$ pour remplacer *pour tout* et $\exists$ pour remplacer *il existe* et la définition devient :

$\forall r > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall k \geqslant N \ l - r \leqslant u_k \leqslant l + r$

Concrètement montrer la convergence de (u_n) vers l revient à construire une fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{N}$: $r \to N$

1. Montrer *à l'aide la définition* que les suites $(\frac{1}{n})$, converge vers 0
2. Montrer *à l'aide la définition* que les suites $(\frac{1}{n+a})$, converge vers 0 pour tout a réel
3. Montrer *à l'aide la définition* que les suites $(\frac{1}{n^2})$, converge vers 0
4. Est ce que la suite (u_n) définie ainsi $u_{2k} = \frac{1}{2k}$ et $u_{2k+1} = 1$ converge ?
5. Peut on intervertir les quantificateurs ? Tester
6. Quelle est la négation de "(u_n) converge vers l " ?

EX N°3

Un peu d'Histoire. D'après vous , la définition de la limite d'une suite a été trouvée

1. par Euclide (quelle époque ?)
2. par Descartes (quelle époque ?)

EX N°4

Le rôle important d'une définition comme une règle du jeu est de fonder les théorèmes

1. Prouver par l'absurde ou par contraposée l'unicité de la limite d'une suite
2. Prouver que si (u_n) converge vers l et si (v_n) converge vers l' alors $(u_n + v_n)$ converge vers l'
3. Prouver que si (u_n) converge vers l et si (v_n) converge vers l' alors $(u_n * v_n)$ converge vers ll'
   (Indication : écrire $u_n v_n - ll' = (u_n - l)(v_n - l') + l(v_n - l') + l'(u_n - l)$)
4. Prouver que si (u_n) converge vers $l \neq 0$ alors $(\frac{1}{u_n})$ converge vers $\frac{1}{l}$

EX N°3

encadrement :

Prouver que si $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang et si si (v_n) converge vers l et si (w_n) converge vers l alors (u_n) converge vers l

EX N°4

Application des théorèmes du cours :

Justifier :

1. $(\frac{1}{n}+2)$ converge vers 2
2. $(\frac{3n-2}{n+1})$ converge vers 3
3. $(\frac{(-1)^n}{n\sin(n)})$ converge vers 0

EX N°5

Démontrer que les suites suivantes sont convergentes :

1. $u_n = \sqrt{u_{n-1}+3}$ avec $u_0 = 1$
2. $u_n = 1 - \dfrac{1}{u_{n-1}+1}$ avec $u_0 = 1$

EX N°6

Démontrer que toute suite convergente est bornée. La réciproque est elle vraie ?

EX N°7

1. Démontrer que si (u_n) tend vers $+\infty$ alors $(\frac{1}{u_n})$ tend vers 0^+
2. Démontrer que si (u_n) tend vers 0^+ alors $(\frac{1}{u_n})$ tend vers $+\infty$

EX N°8

(u_n) une suite à termes positifs et (v_n) la suite définie par :

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$$

Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse et justifier la réponse

1. Si (u_n) converge alors (v_n) converge
2. Si la suite (u_n) est croissante alors (v_n) l'est aussi
3. Si (v_n) converge alors (u_n) converge

EX N°9

Démontrer qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$

EX N°10

Déterminer les limites éventuelles des suites (u_n) suivantes

1. $u_n = n^2 + 4n$
2. $u_n = n^2 + \dfrac{1}{n}$
3. $u_n = n^2 - 4n$
4. $u_n = (1 - \dfrac{1}{n})(n+1)$
5. $u_n = (4 + \dfrac{1}{n})^5$
6. $u_n = \dfrac{1-n^2}{n-2})$
7. $u_n = \dfrac{1-n^2}{n^2-2n-3}$
8. $u_n = \dfrac{1-n^2}{n^3-2n+5}$
9. $u_n = 4^n - 2^n$
10. $u_n = \dfrac{5^n + 3^n}{4^n}$
11. $u_n = 1 + \dfrac{3}{4} + (\dfrac{3}{4})^2 + ... + (\dfrac{3}{4})^n$

EX N°11

1. **Majorer** un nombre A c'est trouver un autre nombre B qui est **plus grand** que A autrement dit $A \leqslant B$
   Par exemple $\dfrac{5}{3}$ est un majorant ou majore $\dfrac{5}{4}$
   Minorer un nombre A c'est trouver un autre nombre C qui est **plus petit** que A autrement dit $A \geqslant C$
   Par exemple $\dfrac{5}{6}$ est un minorant ou minore $\dfrac{5}{4}$
2. On retiendra : Pour minorer une fraction positive on peut majorer le dénominateur (ou minorer le numérateur) et pour majorer une fraction positive il suffit de minorer le dénominateur (ou majorer le numérateur)
   Exemple : majorer et minorer $\dfrac{n}{n^2+1}$, de même pour $\dfrac{n}{n^2+2}$ de même pour $\dfrac{n}{n^2+3}$
3. En déduire un encadrement de la somme $\dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \dfrac{n}{n^2+3}$
4. En déduire un encadrement de la somme $\dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + ... + \dfrac{n}{n^2+n}$
5. Un autre problème : encadrer $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{3n+1}$

EX N°12

Comparer les vitesses de convergence des suites suivantes vers 2 :

$u_n = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \dfrac{2n+1}{n}$ et $w_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2}$

EX N°13

1. Minorer $\sqrt{n^2+1}$ et en déduire que la suite de terme général égal à $\sqrt{n^2+1}$ tend vers $+\infty$
2. En déduire que $u_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}$ converge vers 0

EX N°14

Soit $u_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + ... + \dfrac{n}{n^2+n}$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$
2. En déduire que (u_n) converge

EX N°15

Soit $u_n = \dfrac{\sin(1)}{n^2} + \dfrac{\sin(2)}{n^2} + ... + \dfrac{\sin(n)}{n^2}$

Encadrer (u_n) et en déduire que (u_n) converge

EX N°16

1. Que pensez vous de la convergence de $u_n = \sqrt{u_{n-1}}$ avec $u_0 = a > 0$?
2. Et de la convergence de $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n+1}$?

EX N°17

Une suite (u_n) est dite de Cauchy si :

$\forall r > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, p \geqslant N$ on a $|u_n - u_p| < r$

1. Montrer que si une suite converge alors elle est de Cauchy. On admettra la réciproque
2. Soit (u_n) définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{k}$.

   Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n} \geqslant \dfrac{1}{2}$
3. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$ on a $u_{2n} - u_n \geqslant \dfrac{1}{2}$
4. En déduire que (u_n) n'est pas une suite de Cauchy

EX N°18

Nous verrons en cours d'année l'existence d'une fonction appelée logarithme népérien définie sur $]0; +\infty[$ et notée ln

Nous admettrons que :

— La suite $(\ln(n+1))$ tend vers $+\infty$

— Pour tout k entier supérieur à 1 on a $\ln(k+1)-\ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$

1. Par télescopage montrer que $\ln(n+1) \leqslant 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n}$
2. En déduire que la suite (u_n) définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{k}$ diverge

EX N°19

1. Justifier que :Si (u_n) converge alors $v_n = u_{n+1} - u_n$ converge vers 0
2. La réciproque est elle vraie ?

EX N°20

Essayer de prouver à partir des définitions que "$0\times\infty = 0$". Trouver des contre-exemples

EX N°21

Que peut on dire de la suite $\sqrt{2}$, $\sqrt{2\sqrt{2}}$, $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$... ?

EX N°22 (*)

Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs telle que $u_0 = 1$ et telle que pour tout entier $n \geqslant 1$ au moins la moitié des termes u_0, u_1, ...,u_{n-1} soient supérieurs ou égaux à $2u_n$

Montrer que (u_n) tend vers 0

EX N°23 (*)

On dit qu'une suite (u_n) converge au sens de Cesaro vers l si pour tout intervalle ouvert L centré sur l il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$ on a $\dfrac{u_1+...+u_n}{n} \in L$

1. Démontrer que si (u_n) converge vers l alors (u_n) converge aussi au sens de Cesaro vers l (indication : introduire $s_n = u_1+...+u_n$ et prouver que si $s_n - s_{n-1}$ tend vers l alors $\dfrac{s_n}{n}$ aussi)
2. Montrer que la réciproque est fausse (indication : considérer (u_n) telle que $u_{2n} = 0$ et $u_{2n+1} = 1$)