Limite d'une suite

Vallon

21 septembre 2014

1. Calculer la racine carré d'un nombre positif

2. A la recherche d'une définition

- Notons $\sqrt{2}$ la solution positive de l'équation $x^2 = 2$
- $\sqrt{2}$ est irrationnel c'est à dire il n'existe pas d'entier N et D tels que $\sqrt{2} = \dfrac{N}{D}$
- $\sqrt{2}$ est défini comme limite d'une suite de rationnels
- Comment arrive-t-on à calculer les décimales successives de $\sqrt{2}$ comme 1.4142135623 7309504880 1688724209 6980785696 7187537694 ?

Algorithme (intuitif)

- Partir d'un rectangle de largeur $l_0 = 1$ et de longueur $L_0 = 2$. L'aire de rectangle est donc 2
- Puis répéter un certain nombre de fois le processus suivant :
- Remplacer la longueur par la moyenne de l'ancienne longueur et l'ancienne largeur

$$L_n = \frac{1}{2}(L_{n-1} + l_{n-1})$$

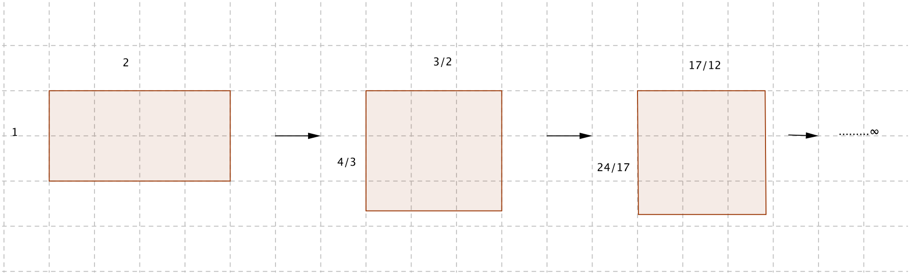
- Ensuite faire :

$$l_n \times L_n = 2$$

(ainsi le nouveau rectangle a toujours pour aire 2)

- $$l_n = \frac{2}{L_n}$$

On déroule l'algorithme 2 fois



On constate que le rectangle devient de plus en plus carré tout en gardant la même aire

```java
class newton{
    public static void main(String[] args){

    double Longueur = 2.0;
    double largeur  = 1.0;

    for(int nombreDeRepetitions = 1;nombreDeRepetitions <= 5; nombreDeRepetitions = nombreDeRepetitions + 1){

                // Entrée de boucle
                System.out.println("--------Début de boucle-------- nombre de répétitions = "+nombreDeRepetitions);

                //moyenne de largeur et longueur
                Longueur = (Longueur + largeur)/2;

                //affichage de la Longueur
                System.out.println("la longueur  est:  "+Longueur);

                //la nouvelle largeur avec la contrainte que l'aire reste égale à 2
                largeur  = 2/Longueur;

                //affichage de la largeur
                System.out.println("la largeur  est:  "+largeur);

                //les 20 premières décimales
                System.out.println(" Les vingt premières décimales sont 1.4142135623 7309504880 ");

                //Fin de boucle
                System.out.println("--------Fin de boucle--------");
                System.out.println();
    }


    }
}
```

```
--------Début de boucle-------- nombre de répétitions = 1
la longueur  est:  1.5
la largeur  est:  1.3333333333333333
 Les vingt premières décimales sont 1.4142135623 7309504880
--------Fin de boucle--------

--------Début de boucle-------- nombre de répétitions = 2
la longueur  est:  1.4166666666666665
la largeur  est:  1.411764705882353
 Les vingt premières décimales sont 1.4142135623 7309504880
--------Fin de boucle--------

--------Début de boucle-------- nombre de répétitions = 3
la longueur  est:  1.4142156862745097
la largeur  est:  1.41421143847487
 Les vingt premières décimales sont 1.4142135623 7309504880
--------Fin de boucle--------

--------Début de boucle-------- nombre de répétitions = 4
la longueur  est:  1.4142135623746899
la largeur  est:  1.4142135623715002
 Les vingt premières décimales sont 1.4142135623 7309504880
--------Fin de boucle--------

--------Début de boucle-------- nombre de répétitions = 5
la longueur  est:  1.414213562373095
la largeur  est:  1.4142135623730951
 Les vingt premières décimales sont 1.4142135623 7309504880
--------Fin de boucle--------
```

Conjectures

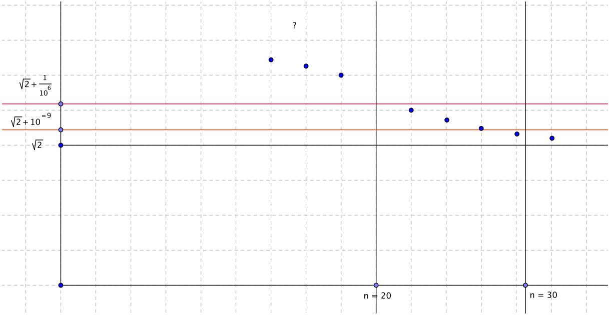
- La suite des longueurs (L_n) semble décroissante
- La suite des largeurs (l_n) semble croissante
- Cet algorithme semble générer les décimales successives de $\sqrt{2}$
- Le nombre de décimales exactes double à chaque répétition
  1,41 –> 1,41421 –> 1,41421356237

- Comment en être sûr ?
- Comment être sûr que (L_n) et (l_n) se rapprochent pour toujours de $\sqrt{2}$?

1. $L_n = \frac{1}{2}(L_{n-1} + \frac{2}{L_{n-1}})$
2. Pour tout n on a
   $L_n - \sqrt{2} = \frac{1}{2}(L_{n-1} + \frac{2}{L_{n-1}}) - \sqrt{2} = \frac{L_{n-1}^2 + 2}{2L_{n-1}} - \sqrt{2} = \frac{(L_{n-1} - \sqrt{2})^2}{2L_{n-1}}$
3. On en déduit par récurrence que pour tout n on a $L_n \geqslant \sqrt{2} \geqslant 1$
4. Et par majoration, pour tout n, $0 \leqslant L_n - \sqrt{2} \leqslant \frac{(L_{n-1} - \sqrt{2})^2}{2}$
5. Par télescopage pour tout $k \geqslant n$,
   $0 \leqslant L_k - \sqrt{2} \leqslant \frac{(2-\sqrt{2})^{2^n}}{2^{2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2+1}} \leqslant \frac{1}{2^n}$
6. On peut interpréter cette inégalité par :
   pour tout $k \geqslant n$ distance$(L_k, \sqrt{2}) \leqslant \frac{1}{2^n}$

Interprétons cette dernière inégalité

- Tous les termes de la suite à partir du rang $n = 10$ sont proches de $\sqrt{2}$ à $2^{-10} \simeq 10^{-3}$ près donc au moins 3 décimales exactes
- Tous les termes de la suite à partir du rang $n = 20$ sont proches de $\sqrt{2}$ à $2^{-20} \simeq 10^{-6}$ près donc au moins 6 décimales exactes
- A partir de quel rang est on sûr d'avoir au moins 9 décimales exactes ?


?
$\sqrt{2}+\frac{1}{10^6}$
$\sqrt{2}+10^{-9}$
$\sqrt{2}$
n = 20
n = 30

Définition

Une suite (u_n) converge vers un nombre réel l si :

pour tout intervalle ouvert J centré sur la limite l,il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle J

Avec cette définition nous donnons du sens à la convergence de (L_n) vers $\sqrt{2}$

- $u_n = (-1)^n$ ne converge pas
- Les suites $(\frac{1}{n^k})$ avec $k \geqslant 1$ convergent vers 0

Par contre, cette définition n'est pas pratique pour montrer la convergence d'une suite en général . Nous allons procéder comme pour la dérivation et montrer des théorèmes plus pratiques que la définition.