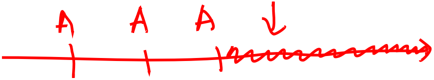
Limite infinie d'une suite

Vallon

21 septembre 2014

Table :



Définition

Une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si pour tout intervalle $]A;+\infty[$ il existe un rang N tel que pour tout n si $n \geqslant N$ alors $u_n \geqslant A$

Définition

Une suite (u_n) tend vers $-\infty$ si pour tout intervalle $]-\infty[;A$ il existe un rang N tel que pour tout n si $n \geqslant N$ alors $u_n \leqslant A$

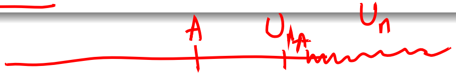
Exemples : $(n), (n^2)$... tendent vers $+\infty$

Est ce qu'une suite non majorée tend forcément vers $+\infty$?

- Pour contredire une proposition mathématique il suffit de trouver un contre-exemple
- $u_{2n} = n$ et $u_{2n+1} = 0$ est non majorée mais ne tend pas vers $+\infty$
- Que manque t-il à une suite non majorée pour tendre vers $+\infty$?

Théorème

Une suite non majorée et croissante tend vers $+\infty$



Démonstration.

Soit $A > 0$ quelconque

- puisque (u_n) non majorée il existe un indice n_A tel que $u_{n_A} > A$
- puisque (u_n) croissante pour tout $n \geqslant n_A$ $u_n \geqslant u_{n_A} > A$

$\square$

Somme

Théorème

Si (u_n) tend vers $+\infty$ et (v_n) tend vers $+\infty$ alors $(u_n) + (v_n)$ tend vers $+\infty$

Plus généralement

Théorème

Si (u_n) tend vers $+\infty$ et (v_n) tend vers $l \neq -\infty$ alors $(u_n) + (v_n)$ tend vers $+\infty$

On ne peut rien conclure si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to -\infty$

- $u_n = n^2$ et $v_n = -n$ et $u_n + v_n = n^2 - n = n^2(1 - \frac{1}{n})$

$$\underset{+\infty}{\downarrow}$$

Produit

Théorème

Si (u_n) *tend vers* $+\infty$ *et* (v_n) *tend vers* $+\infty$ *alors* $(u_n) \times (v_n)$ *tend vers* $+\infty$

Plus généralement

Théorème

Si (u_n) *tend vers* $+\infty$ *et* (v_n) *tend vers* $l \neq 0$ *alors* $(u_n) \times (v_n)$ *tend vers* $sgn(l) \times \infty$ *où* $sgn(l)$ *est le signe de* l

On ne peut rien conclure si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to 0$ // Forme indéterminée

- $u_n = n^2$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$ et $u_n \times v_n = n \to +\infty$
- $u_n = n$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$ et $u_n \times v_n = 1$
- $u_n = n$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$ et $u_n \times v_n = \dfrac{1}{n} \to 0$

Inverse

Théorème

Si (u_n) *tend vers* $+\infty$ *alors* $\dfrac{1}{u_n}$ *tend vers 0 par valeurs supérieures à 0. On note cela* 0^+

Réciproquement

$V_n = \frac{1}{U_n}$

Théorème

Si (u_n) *tend vers* 0^+ *alors* (v_n) *tend vers* $+\infty$

Minoration

Théorème

Si $u_n \geqslant v_n$ et (v_n) tend vers $+\infty$ alors (u_n) tend vers $+\infty$

Théorème

Si $q > 1$ alors (q^n) tend vers $+\infty$

Démonstration.

Puisque $q > 1$ donc il existe $a > 0$ tel que $q = 1 + a$ et $q^n = (1+a)^n$ or nous avons démontré par récurrence que pour tout n on a $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ or la suite $(1 + na)$ tend vers $+\infty$ donc d'après le théorème ci-dessus q^n aussi □

Exemples

- $u_n = \dfrac{n^2 - n + 1}{n + 1} = \dfrac{n^2(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})}{n(1 + \frac{1}{n})} = n \times (1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}) \times \dfrac{1}{1 + \frac{1}{n}}$
- $u_n = n + sin(n) \geqslant n - 1 \to +\infty$ donc u_n tend vers $+\infty$

$+\infty$ 0 0