Calcul intégral

EX N°1

Calculer de manière géométrique

$\int\limits_0^2 3\mathrm{d}x$, $\int\limits_0^2 t\mathrm{d}t$ et $\int\limits_{-2}^{-1} |x|\mathrm{d}x$

EX N°2

Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $G(x) = x\ln(x) - x$

1. Calculer G' et en déduire une primitive de ln
2. Soit F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = \int\limits_1^x \ln(t)\mathrm{d}t$. Que vaut F' ?
3. En déduire qu'il existe C réel tel que pour tout $x \in]0;+\infty[$ on a $F(x) = G(x)+C$
4. Que vaut C ?

EX N°3

1. Soit F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int\limits_0^x t\mathrm{d}t$. Que vaut F' ?
2. Soit G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int\limits_x^0 t\mathrm{d}t$. Que vaut G' ?
3. Soit H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \int\limits_0^{x^2} t\mathrm{d}t$. Que vaut H' ?
4. Soit J définie sur $\mathbb{R}$ par $J(x) = \int\limits_x^{x^2} t\mathrm{d}t$. Que vaut J' ?

EX N°4

Déterminer les primitives sur l'intervalle donné de chaque fonction

1. $f(x) = x^2 + 4x + 1$ sur $\mathbb{R}$
2. $g(x) = |x|$ sur $\mathbb{R}$
3. $h(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$
4. $k(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty;0[$

EX N°5

Déterminer une primitive pour chaque fonction sur l'intervalle donné

1. $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$
2. $g(x) = 2e^x$ sur $\mathbb{R}$
3. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$

EX N°6

Déterminer une primitive pour chaque fonction sur l'intervalle donné (reconnaître la forme $\frac{u'}{u}$)

1. $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur $]0; +\infty[$
2. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ sur $]-1; 1[$
3. $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ sur $]-1; 1[$
4. $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ sur $]0; \frac{\pi}{2}[$
5. $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}$ sur $]-\infty; 0[$

EX N°7

Déterminer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition imposée :

1. $f(x) = 4x$ avec $F(0) = 0$
2. $f(t) = g$ avec $F(0) = h$
3.

EX N°8

1. Résoudre $v'(t) = -g$ avec $v(0) = v\cos(\alpha)$
2. Résoudre $x''(t) = g$ avec $x'(0) = 0$ et $x(0) = 0$
3. Résoudre $x''(t) = g$ avec $v(0) = v$ et $x(0) = 0$

EX N°9

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$

1. Soit F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
   Soit $c \in]a; b[$ et $h > 0$
   Encadrer $\frac{F(c+h) - F(c)}{h}$
2. Vers quoi tend vers $\frac{F(c+h) - F(c)}{h}$ lorsque $h \to 0^+$
3. Encadrer $\frac{F(c+h) - F(c)}{h}$ lorsque $h < 0$ et faire tendre h vers 0^-
4. Conclure

EX N°10

On cherche une relation entre la vitesse d'éjection d'un bouchon de champagne v_0 et la hauteur maximale atteinte par ce bouchon h

On assimile le bouchon à un point B qui se déplace verticalement sur un axe $(O;\vec{i})$. Ce point est repéré sur cet axe par $\overrightarrow{OB} = x(t)\vec{i}$. A l'instant initial $(t = 0)$ on a $x'(0) = v_0$ et $x(0) = 0$. Pour simplifier on considère que le bouchon n'est soumis qu'à son poids $\overrightarrow{P} = m\vec{g}$, où $\vec{g}$ et $\vec{i}$ sont de sens opposés

1. Ecrire le principe fondamental de la dynamique sur l'axe $(O;\vec{i})$ et vérifier que $x"(t) = -g$
2. En déduire $x'(t)$ puis $x(t)$
3. A quel instant $t = t_A$, $x'(t)$ change de signe ? A quoi cela correspond physiquement ?
4. Que vaut $x(t_A)$? En déduire que $v_0 = \sqrt{2gh}$
5. Application numérique : $v_0 = 16$ m/s on prendra $g = 9,81\ m/s^2$. Calculer h
6. Une autre façon de faire : Calculer de deux manières différentes $\int\limits_0^{t_A} x"(t)\mathrm{d}t$
7. Déterminer $x'(t)$ puis calculer de deux manières différentes $\int\limits_0^{t_A} x'(t)\mathrm{d}t$

EX N°11

On veut estimer la profondeur d'un puits p. Pour cela on laisse tomber dans ce puits une petite pierre sans vitesse initiale et on chronomètre la durée t_I entre l'instant initial $t = 0$ où on a lâché la pierre et $t = t_I$ où on entend l'impact de la pierre dans l'eau au fond du puits

1. Modéliser le phénomène et appliquer le principe fondamental de la dynamique en considérant que la pierre n'est soumise qu'à son poids
2. En déduire une relation entre le temps t_I et la profondeur p du puits
3. Quel terme correctif devrait on apporter à cette relation ?
4. A partir de quelle profondeur de puits ce correctif ne peut plus être négligé ?

EX N°12

Primitive de la forme $u'u^n$ avec $n \in \mathbb{Q}^*$

Déterminer une primitive de f sur I

1. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $I = \mathbb{R}^{+*}$
2. $f(x) = \mathrm{e}^x(2 - 3\mathrm{e}^x)^2$ sur $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ sur $I = \mathbb{R}$

EX N°13

Primitive de la forme $u'\mathrm{e}^u$

Déterminer une primitive de f sur I

1. $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{-x+2}$ sur $I = \mathbb{R}$

EX N°14

On pose $I = \int\limits_0^{\ln(16)} \frac{\mathrm{e}^t + 3}{\mathrm{e}^t + 4}\mathrm{d}t$ et $J = \int\limits_0^{\ln(16)} \frac{1}{\mathrm{e}^t + 4}\mathrm{d}t$

1. Calculer $I + J$ et $I - 3J$
2. En déduire les valeurs de I et J

EX N°15

On pose $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x)}{\cos(x) - \sin(x)}\mathrm{d}x$ et $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x)}{\cos(x) - \sin(x)}\mathrm{d}x$

1. Calculer $I + J$ et $J - I$
2. En déduire les valeurs de I et J

EX N°16

1. Etablir que pour $u \geqslant 0$ on a $1 - u \leqslant \frac{1}{1+u} \leqslant 1$
2. En déduire par intégration que pour $x \geqslant 0$ on a $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$
3. En déduire un encadrement de $J = \int\limits_0^1 \ln(4 + x^2)\mathrm{d}x$

EX N°17

1. Pour tout $t \geqslant 3$ établir que $0 \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{3t}{2}}$
2. En déduire que pour tout $\lambda \geqslant 3$, l'intégrale $I(\lambda) = \int\limits_0^{\lambda} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$ vérifie

$$0 \leqslant I(\lambda) \leqslant 0,008$$

EX N°18

Il s'agit de prouver que la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} ... + \frac{1}{n}$ tend vers $+\infty$

1. Montrer que $\frac{1}{n+1} \leqslant \int\limits_n^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout entier $n \geqslant 1$
2. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $u_n \geqslant \int\limits_1^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$
3. Conclure

EX N°19

1. Soit f une fonction continue croissante sur R^+
   Montrer que $f(1)+f(2)+...+f(n-1) \leqslant \int\limits_1^n f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(2)+...+f(n)$
2. Vérifier que $F(x)=x\ln(x)-x$ est une primitive de ln sur $\mathbb{R}^{+*}$
3. En déduire que $\ln((n-1)!) \leqslant \int\limits_1^n \ln(x)\mathrm{d}x \leqslant \ln((n)!)$ pour $n \geqslant 2$
4. En déduire que $(n-1)! \leqslant \dfrac{n^n}{\mathrm{e}^{n-1}} \leqslant n!$ pour $n \geqslant 2$
5. En déduire que $\dfrac{n^n}{\mathrm{e}^{n-1}} \leqslant n! \leqslant \dfrac{(n+1)^{n+1}}{\mathrm{e}^n}$ pour $n \geqslant 2$
6. Déterminer la limite de la suite $(\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n})$

EX N°20

Soit $I_n = \int\limits_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x$ pour $n \geqslant 1$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a $0 \leqslant I_n \leqslant \ln(2)$
2. Etudier les variations de la suite (I_n)
3. En déduire que la suite (I_n) converge
4. En utilisant l'inégalité définie sur $[0;+\infty[$ par $\ln(1+x) \leqslant x$, déduire que pour tout entier n non nul et tout $x \geqslant 0$ on a $\ln(1+x^n) \leqslant x^n$
5. EN déduire la limite de (I_n)

EX N°20

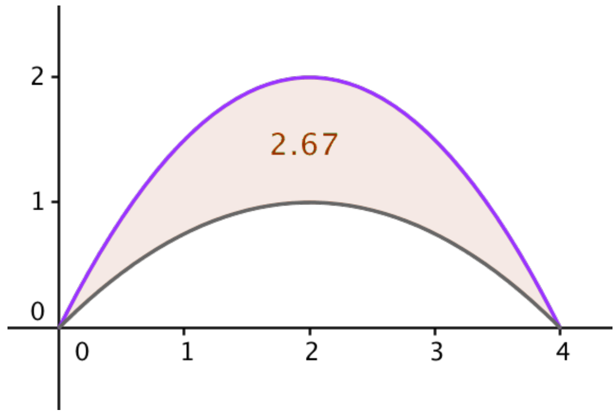
Déterminer la limite de S_n lorsque :

1. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n+k}{n^2+k^2}$
2. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{n^2(n^3+k^3)^{\frac{1}{3}}}$
3. $S_n = \dfrac{1}{n}[(n+1)(n+2)...(2n)]^{\frac{1}{n}}$

EX N°20

Inégalités par intégration (encadrer une fonction)

1. A partir de $\cos(t) \leqslant 1$ pour t réel Montrer que $\sin(x) \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$
2. En déduire $1-\dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos(x)$ pour $x \geqslant 0$
3. En déduire $x-\dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x)$ pour $x \geqslant 0$
4. En déduire $\cos(x) \leqslant 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$ pour $x \geqslant 0$

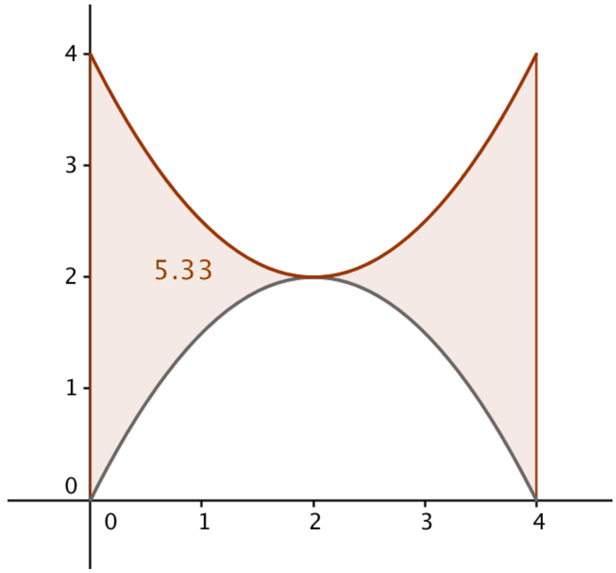


EX N°21

le logiciel Geogebra donne comme valeur approchée de l'aire entre les deux courbes $y = -\dfrac{x(x-4)}{2}$ et $y = -\dfrac{x(x-4)}{4}$,la valeur 2,67

1. Que pourrait être la valeur exacte ?
2. Vérifier

EX N°21



le logiciel Geogebra donne comme valeur approchée de l'aire entre les deux courbes la valeur 5,33

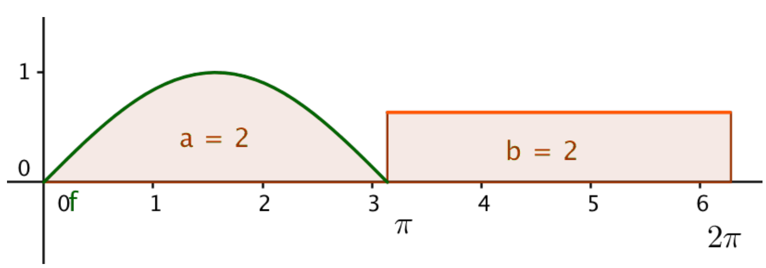
1. Que pourrait être la valeur exacte ?
2. Vérifier (l'une des deux courbes est une des deux courbes de l'exercice précédent et l'autre ?)

EX N°22

1. Soit $I_n = \int_1^n \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x$. Que représente I_n ?
2. Que vaut $\lim_{n \to +\infty} I_n$? Que représente cette limite ?
3. Vrai ou faux ? "Si une surface est infinie alors son aire est infinie"

EX N°23

Comment définir la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle ? Regarder sur le dessin ci-dessous où on cherche à définir la valeur moyenne m de sinus sur $[0; \pi]$ par l'intermédiaire d'un calcul d'aires. Mettre cela en forme et donner la définition de la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle



Essayer avec d'autres fonctions sur d'autres intervalles

EX N°24(Inégalité triangulaire)

1. Comparer sur plusieurs exemples $\int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ et $|\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x|$
2. Conjecturer un théorème

EX N°25 Intégration par parties

u et v deux fonctions dérivables sur $[a;b]$

1. En partant de $(uv)' = u'v + uv'$ montrer que

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

   On dit que l'on a intégré $\int\limits_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ par parties car on a transformé le calcul d'une intégrale en une autre mais **plus simple**

2. Transformer par une intégration par parties $\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ en $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ puis finir le calcul
3. Transformer par une intégration par parties $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} t\cos(t)\mathrm{d}t$ en $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(t)\mathrm{d}x$ puis finir le calcul
4. Calculer par une intégration par parties $\int\limits_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x$

EX N°26

Peut on parler de primitivation par parties ? (Aide : $\int\limits_a^x u(t)v'(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de uv' qui s'annule en a)

EX N°27*(Formule de taylor avec reste intégral)

Soit f une fonction n + 1 fois dérivable sur R et telle que la dérivée n + 1 ième est continue sur $\mathbb{R}$

1. On sait que $\int\limits_0^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(0)$. On va transformer $\int\limits_0^x f'(t)\mathrm{d}t$ par une intégration par parties en posant $u' = 1$ et $v = f'(t)$. On prendra comme primitive de u' , $u = t - x$. Qu'obtient on ?
2. En déduire que $f(x) = f(0) + xf(0) - \int\limits_0^x (t-x)f''(t)\mathrm{d}t$
3. On va transformer $\int\limits_0^x (t-x)f''(t)\mathrm{d}t$ par une intégration par parties en posant $u' = t'$ et $v = f''(t)$. Qu'obtient on ?
4. En déduire que $f(x) = f(0) + xf(0) + \dfrac{x^2}{2}f''(0) + \int\limits_0^x \dfrac{(t-x)^2}{2}f'''(t)\mathrm{d}t$
5. On généralise en posant $R_k = \int\limits_0^x \dfrac{(x-t)^k}{k!}f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t$, pour k etl que $0 \leqslant k \leqslant n$.

   Montrer par une intégration par parties que $R_k = -\dfrac{x^k}{k!}f^{(k)}(0) + R_{k-1}$

6. En déduire $R_n = -\dfrac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) - -\dfrac{x^k}{k!}f^{(k)}(0) + ... - f(0) + f(x)$
7. En déduire $f(x) = \underbrace{f(0) + f(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 + ... + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{=P_n} + R_n$

   C'est la formule de Taylor avec reste intégral, il reste à prouver que le polynôme P_n, appelée la partie principale d'ordre n est la meilleure approximation polynomiale de f au voisinage de 0 à l'ordre n ce qui signifie que :
   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - P_n(x)}{x^n} = 0$ c'est à dire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R_n}{x^n} = 0$
8. Justifier qu'il existe M réel positif tel que (continuité de $f^{(n+1)}$ sur [0 ;x] :
   $-\dfrac{M(x-t)^n}{n!} \leqslant \dfrac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) \leqslant \dfrac{M(x-t)^n}{n!}$ pour tout $t \in [0; x]$
9. En déduire $-\dfrac{Mx}{(n+1)!} \leqslant \dfrac{R_n}{x^n} \leqslant \dfrac{Mx}{(n+1)!}$
10. Conclure
11. Applications : Trouver les parties principales de la fonction exponentielle, la fonction sinus et la fonction cosinus

EX N°28*

Intégrales de Wallis

EX N°29*

Formule de Stirling,

EX N°30*

Logarithme intégral

EX N°31*

Que signifie dt ? Longueur d'une courbe Inversion de th longueur de la parabole