Géométrie vectorielle dans l'espace

Vallon

5 janvier 2016

- Dans l'espace un plan est défini par 3 points non alignés
- Dans tout plan de l'espace on peut réutiliser les connaissances de géométrie plane, autrement dit on peut réutiliser le calcul vectoriel

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$

1. Trois points A,B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires
2. Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires

Définition

1. Etant donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires on construit à partir de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ainsi :
   $E = \{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \ / \ \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}\}$
2. Etant donné trois points A, B et C non alignés, le plan (ABC) est défini par l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
3. $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \{M/$ il existe deux réels x et y tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}\}$
4. De même la droite (AB) peut être définie par le point A et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ainsi
   $(A; \overrightarrow{AB}) = \{M/$ il existe un réel x tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}\}$

Définition

1. Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si l'un des vecteurs est une combinaison linéaire des deux autres
2. $M \in (A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \iff \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires

Définition

1. Intuitivement "on peut se déplacer dans l'espace suivant trois directions"
2. Il existe trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non coplanaires
3. L'espace est défini comme l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ à partir de n'importe quel point A

Définition

1. On choisit un point particulier de l'espace O comme origine
2. On choisit trois vecteurs non coplanaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$
3. L'espace est l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{OM}$ est une combinaison linéaire de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$
4. Pour tout point M de l'espace , il existe trois nombres réels x, y, z tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
5. $(x; y; z)$ sont les coordonnées de M relativement au repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

1. $(A;\overrightarrow{AB}) = \{M/$ il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}\}$
2. $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$
3. Ecriture explicite : $M(x;y;z) \in (A;\overrightarrow{AB}) \iff$ x,y et z sont solution du système
$$\begin{cases} x = x_A + tx_{\overrightarrow{AB}} \\ y = y_A + ty_{\overrightarrow{AB}} \\ z = z_A + tz_{\overrightarrow{AB}} \end{cases}$$

Théorème

Deux plans P_1 et P_2 sécants et contenant deux droites d_1 et d_2 parallèles, se coupent alors en une droite d parallèle à d_1 et d_2

Démonstration.

On peut écrire $d1 = (A_1; \vec{u})$ et $d2 = (A_2; \vec{u})$ car elles sont parallèles donc elles ont la même direction
On peut écrire $P_1 = (A_1; \vec{u}; \vec{v})$ avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires et $P_2 = (A_2; \vec{u}; \vec{w})$ avec $\vec{u}$ et $\vec{w}$ non colinéaires
Il existe un point B appartenant à $P_1 \cap P_2$
Donc $(B; \vec{u}) = P_1 \cap P_2$

$\square$