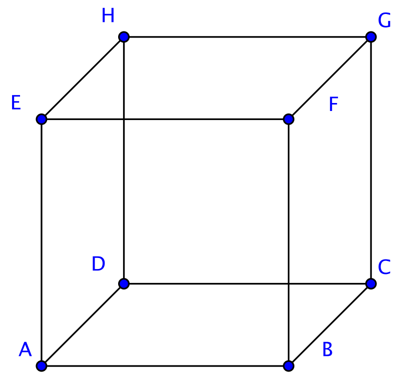
Géométrie vectorielle

EX N°1



Démontrer que

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB}$
2. $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HG}$
3. $\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DG}$

EX N°2

Construire les points P, Q, R, S tels que :

1. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$
2. $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$
3. $\overrightarrow{RG} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$
4. $\overrightarrow{SE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

EX N°3

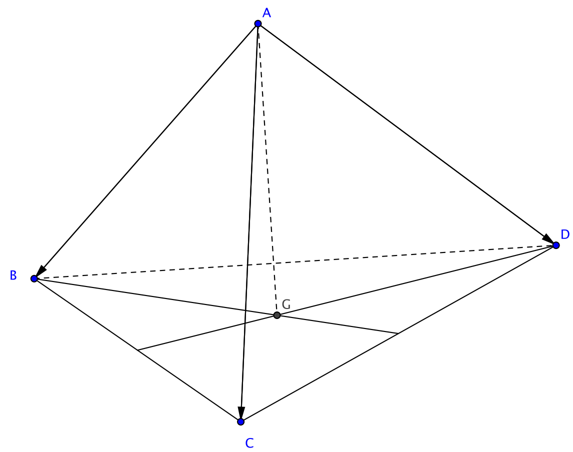
Exprimer les vecteurs suivants comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DC}$

1. $\overrightarrow{DB}$
2. $\overrightarrow{FH}$

Exprimer les vecteurs suivants comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DH}$

1. $\overrightarrow{BD}$
2. $\overrightarrow{HF}$

EX N°4



I est le milieu de $[AB]$, J est le milieu de $[CD]$, K est le milieu de $[AD]$ et L est le milieu de $[BC]$

1. Justifier que $2\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{AC}$ et $2\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AC}$
2. Que peut on en déduire pour le quadrilatère $IJKL$?
3. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{LJ}$ sont colinéaires. Que peut on en déduire ?
4. Soit G un point du triangle BCD défini par $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$. En déduire que $\overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{JG}$ et $\overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{LG}$. Que peut on en déduire pour G ?
5. Exprimer les vecteurs suivants comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$
   (a) $\overrightarrow{BG}$
   (b) $\overrightarrow{DG}$
   (c) $\overrightarrow{LJ}$

EX N°5

(Relativement au cube)Montrer que les vecteurs suivants sont coplanaires :

1. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{DC}$
2. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{DC}$
3. $\overrightarrow{HD}$, $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{DB}$

EX N°6

(Relativement au cube : Par hypothèse, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$ ne sont pas coplanaires)

Est ce que les vecteurs suivants sont coplanaires ?

1. $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{HG}$
2. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{DE}$
3. $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{EC}$

EX N°7

Soit S l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle :

$$f'' - f' - 2f = 0$$

1. Vérifier que f définie par $f(t) = e^{-t}$ appartient à S
2. Vérifier que g définie par $g(t) = e^{2t}$ appartient à S
3. Soit E l'ensemble des **combinaisons linéaires** de f et de g. Montrer que $E \in S$
4. On dit que $\{f, g\}$ forme un système **libre** si α et β réels $\alpha f + \beta g = 0$ alors $\alpha = \beta = 0$.
5. Montrer que $\{f, g\}$ est un système **libre** (autrement dit ces fonctions ne sont pas colinéaires)

EX N°8

Soit F l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions f_1,f_2 et f_3 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f_k(x) = \sin(kx)$ pour $k = 1, 2, 3$

Montrer que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est un système libre (autrement dit ces fonctions ne sont pas "coplanaires")

EX N°9

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{EC}$ en fonction des vecteurs non coplanaires $\vec{u} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{DB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{DH}$
2. Calculer les coordonnées de ces vecteurs dans le repère $(D; \vec{u}; \vec{v} : \vec{w}$
3. Quels sont les coordonnées du milieu du segment [DB] et du point C ?
4. Donner une représentation paramétrique des droites $(I; \overrightarrow{DH})$ et $(C; \overrightarrow{EC})$
5. Montrer que ces deux droites sont sécantes et donner les coordonnées du point d'intersection

EX N°10

Dans un repère de l'espace d et d' sont deux droites de représentations paramétriques

$$d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad d' : \begin{cases} x = k \\ y = -3 - 3k \\ z = 1 - k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

Montrer que les droites d et d' ne sont pas parallèles puis qu'elles ne sont pas coplanaires

EX N°11(BAC)

L'espace est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ d'unité 1 km. Le plan $(O;\vec{i};\vec{j})$ représente le sol.

Deux routes "aériennes" à contrôler sont représentées par deux droites d_1 et d_2 dont on connaît des représentations paramétriques :

$$d_1 : \begin{cases} x = 3 + a \\ y = 9 + 3a \\ z = 2 \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}) \qquad d_2 : \begin{cases} x = 0,5 + 2b \\ y = 4 + b \\ z = 4 - b \end{cases} \quad (b \in \mathbb{R})$$

1. Indiquer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u_1}$ directeur de d_1 et d'un vecteur $\vec{u_2}$ directeur de d_2
2. Prouver que les droites d_1 et d_2 ne sont pas coplanaires
3. On veut installer au sommet S de la tour de contrôle de coordonnées $S(3;4;0,1)$ un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée (R). Soit P_1 le plan contenant S et d_1 et soit P_2 le plan contenant S et d_2
   (a) Montrer que d_2 est sécante à P_1
   (b) Montrer que d_1 est sécante à P_2
   (c) Un technicien affirme qu'il est possible de choisir la direction de (R) pour que cette droite coupe chacune des droites d_1 et d_2
   Cette affirmation est elle vraie ?Justifier la réponse

EX N°12

L'espace est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

Le plan P a pour représentation paramétrique

$$P : \begin{cases} x = -2 + t + 2t' \\ y = -t - 2t' \\ z = -1 - t + 3t' \end{cases} \qquad (t, t' \in \mathbb{R})$$

la droite D a pour représentation paramétrique

$$D : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Etudier la position relative de D par rapport à P. Généraliser

EX N°13

Soit P et P' deux plans sécants en une droite d". P contient une droite d et P' contient une droite d' telles que $d//d'$. Démontrer que $d//d$"