Forme exponentielle d'un nombre complexe

Vallon

30 novembre 2014

1. Equation différentielle
2. Forme exponentielle
3. Propriétés multiplicatives du module
4. Propriétés multiplicatives de l'argument

Théorème

Etant donné un réel k, Il existe une solution unique *à l'équation différentielle*
$f'(t) = kf(t)$ *avec* $f(0) = 1$
Cette solution est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $t \to e^{kt}$

Théorème

Il existe une solution unique *à l'équation différentielle*
$f'(t) = if(t)$ *avec* $f(0) = 1$
Cette solution est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $t \to e^{it}$

- $t \to \cos t + i \sin t$ est aussi solution de $f'(t) = if(t)$ avec $f(0) = 1$
- Donc $e^{it} = \cos t + i \sin t$

- Donc pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $z = |z|(\cos t + i \sin t) = |z|e^{it}$ où t est un argument de z
- $|z|e^{it}$ est la forme exponentielle de z
- Exemple : $z = 1 + \sqrt{3}i = 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + isin(\frac{\pi}{3})) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Théorème

- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $|z^n| = |z|^n$
- $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$
- $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- *Attention !* $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

Démonstration.

- $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2$

$\square$

Théorème

- $arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)\ (2\pi)$
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $arg(z^n) = narg(z)\ (2\pi)$
- $arg(\frac{1}{z}) = -arg(z)\ (2\pi)$
- $arg(\frac{z_1}{z_2}) = arg(z_1) - arg(z_2)\ (2\pi)$

Démonstration.

- $z_1 z_2 = |z_1| e^{i\theta_1} |z_2| e^{i\theta_2} = |z_1||z_2| e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i\theta_1 + i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$\square$

Théorème

$$arg(\frac{d-c}{b-a}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \ (2\pi)$$

Démonstration.

$$arg(\frac{d-c}{b-a}) = arg(d-c) - arg(b-a) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{CD}) - (u, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \ (2\pi)$$

□