Fonction exponentielle

Vallon

16 novembre 2014

Problème

Existe -t- il des fonctions analogues aux suites géométriques ?

- $u_n = q^n u_0$ On prend $u_0 = 1$ donc $u_n = q^n = u_1^n$
- $u_{n+m} = q^{n+m} = q^n q^m = u_n u_m$
- Quels sont les fonctions f définies sur R telles que $f(x + y) = f(x)f(y)$ avec $f(0) = 1$? (équation fonctionnelle)

Théorème

- *Les solutions f (si elles existent) ne s'annulent pas sur* $\mathbb{R}$
- *Les solutions sont strictement positives*
- *On pose b = f(1). Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $f(n) = b^n$ *(récurrence)*
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ $f(-n) = \dfrac{1}{b^n} = b^{-n}$
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $f(\dfrac{1}{n}) = b^{\frac{1}{n}}$ *Par définition* $(b^{\frac{1}{n}})^n = b$
- *Pour tout* $n, m \in \mathbb{N}$ *on a* $f(\dfrac{m}{n}) = b^{\frac{m}{n}}$

Démonstration.

- Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$ dans ce cas $f(a-a) = f(0) = 1$ mais aussi $f(a-a) = f(a) \times f(-a) = 0$ ce qui est absurde
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = f(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}) = (f(\dfrac{x}{2}))^2 > 0$

$\square$

Théorème

Maintenant on impose la continuité aux solutions de l'équation fonctionnelle

- *Pour tout réel x il existe une suite de rationnels $(\frac{p_n}{q_n})$ qui converge vers x (admis)*
- *Donc par continuité $f(\frac{p_n}{q_n})$ converge vers $f(x)$*

Théorème

Supposons f dérivable sur $\mathbb{R}$ alors pour tout x réel on a $f'(x) = f(x)f'(0)$

Démonstration.

Considérons $f(x+y) = f(x)f(y)$ comme une fonction de y et dérivons par rapport à y pour tout x réel

On obtient $f'(x+y) = f(x)f'(y)$ pour tout x et remplaçons y par 0

On obtient $f'(x) = f(x)f'(0)$ pour tout x réel (équation différentielle) □

Théorème

On pose $f'(0) = 1$. Dans ce cas il existe une unique solution à l'équation différentielle $f'(x) = f(x)$ avec $f(0) = 1$. Elle s'appelle la fonction exponentielle, on la note $x \to e^x$
$e^1 = e \simeq 2,718281828459045$

Démonstration.

- $f(0) = 1$ donc on peut considérer que $f(x) = 1 + f_1(x)$ avec $f_1(0) = 0$
  Or $f'(x) = f(x) = 1 + f_1(x)$
- Donc $f(x) = 1 + x + f_2(x)$ car le 1 de f' vient du x de f
- Donc $f'(x) = 1 + x + f_2(x)$ et $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots$ car le x de f' vient du $\frac{x^2}{2}$ de f
- Finalement $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ (limite)

$\square$

Théorème

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Démonstration.

La fonction dérivée de la fonction exponentielle est elle-même or la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ □

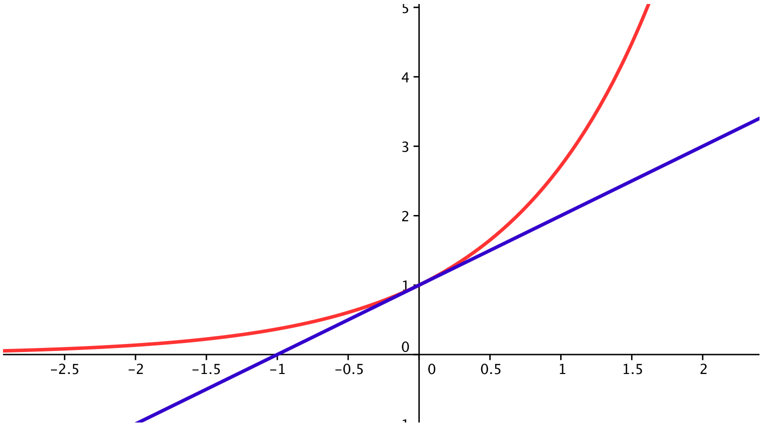
Théorème

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- *(croissance comparée)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- *(croissance comparée)* $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

Démonstration.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $e^x > \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ donc $\dfrac{e^x}{x^n} > \dfrac{x}{(n+1)!}$
2. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ si $x \to -\infty$ alors $-x \to +\infty$ et

   $x^n e^x = (-x)^n e^{-x} = \dfrac{(-x)^n}{e^x} \to 0$


5
4
3
2
1
0
−1
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2