La fonction exponentielle

EX N°1

(R.O.C) On admet qu'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ et qu'une telle fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Il s'agit de prouver l'unicité d'une telle fonction en faisant un raisonnement par l'absurde.

On note g une autre fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$

1. Montrer que la fonction $h = \dfrac{g}{f}$ est constante sur $\mathbb{R}$
2. Calculer $h(0)$ et conclure

EX N°2

Simplifier les expressions

1. $e^{x+1} \times e^{1-x}$
2. $\dfrac{e^{x+1}}{e^{1-x}}$
3. $(e^{x+1})^2$
4. $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$

EX N°3

Résoudre dans $\mathbb{R}$

1. $e^{2x} = 1$
2. $e^{x^2} = e^{x+1}$
3. $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$
4. $e^x + 1 - \dfrac{2}{e^x} = 0$
5. $(e^{2x}) \leqslant 0$
6. $(e^x + 1)(e^{-2x} - 1) > 0$

EX N°4

On note $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Vérifier que :

1. $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$
2. $ch^2(x) + sh^2(x) = ch(2x)$
3. $sh(2x) = 2sh(x)ch(x)$

EX N°5

Soit f une fonction croissante sur un intervalle I

1. Démontrer que si $f(a) = f(b)$ alors $a = b$
2. Démontrer que si $f(a) \leqslant f(b)$ alors $a \leqslant b$

EX N°6

Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes :

1. $x \to e^x + e^{-x}$
2. $x \to e^x - e^{-x}$
3. $x \to e^{2x} - e^x$
4. $x \to xe^x$
5. $x \to \dfrac{e^x}{2+e^x}$

EX N°7

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = xe^x$
2. $f(x) = ch(x)$
3. $f(x) = sh(x)$
4. $f(x) = th(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)}$

EX N°8*

On admet que f dérivable en $a \iff$ il existe un nombre l et une fonction ϵ telle que pour tout h réel $f(a+h) = f(a) + lh + h\epsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$

1. Montrer que si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$ alors gof est dérivable en a et pour tout x réel $(gof)'(a) = g'(f(a) \times f'(a)$
2. En déduire $(e^{u(x)})' = e^{u(x)} \times u'(x)$

EX N°9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $A > 0$

1. Calculer f'. Sens de variations
2. Calculer la limite de f en $+\infty$. Interprétation géométrique. Tableau de variations
3. Donner l'équation de la tangente T en 0 à C_f
4. En déduire l'abscisse du point d'intersection de T et de l'axe des abscisses. Qu'observez vous ?
5. Donner différentes valeurs aux paramètres A et τ et observer les différentes courbes (Utiliser Geogebra)

EX N°10

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout x réel on a $e^x \geqslant \dfrac{x^n}{n!}$
2. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

EX N°11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)e^{-0,1x}$

1. Calculer f'
2. Etudier le signe de f' et en déduire le sens de variations de f
3. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine
4. En déduire le tableau de variations complet
5. Tracer la courbe à la calculatrice

EX N°12*

Soit l'équation fonctionnelle (E) : $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout x et y réels

1. Montrer que la fonction nulle qui à tout x réel associe 0, est solution
2. Quelles sont les valeurs possibles pour $f(0)$?
3. Montrer que si f est solution non nulle de (E) alors $f > 0$(Indication : Pour tout x réel il existe y réel tel que $x = 2y$ or $f(x) = f(2y) = f(y+y) = ...$)
4. Montrer que si f est continue en 0 alors f est continue sur $\mathbb{R}$
5. On pose $f(1) = a > 0$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f(n) = a^n$
6. En déduire que pour tout $k < 0$ entier naturel $f(k) = \dfrac{1}{a^{-k}}$
7. Que vaut $f(\dfrac{1}{2})$? Plus généralement que vaut $f(\dfrac{1}{n})$ pour n entier ?