Exercices : Modèle d'évolution - Partie 1

Ex 1

Cette fois ci **chaque couple de lapins donne une portée de k couples avec k entier et $k \geqslant 1$**

Comme dans le cours on a trois suites (J_n) le nombre de couples de jeunes lapins au mois n, (A_n) le nombre de couples adultes de lapin au mois n et C_n le nombre total de couples au mois n

L'initialisation est $J_0 = 1$,

1. Traduire par une formule de récurrence entre J_n et A_{n-1} le fait que chaque couple adulte au mois $n-1$ fait une portée de k couples
2. En reprenant alors la méthode par récurrence en cours montrer que $C_n = C_{n-1} + kC_{n-2}$
3. Calculer en fonction de k C_2, C_3
4. Ecrire une fonction Python `c(nbMois,k)`
5. En utilisant cette fonction que vaut $c(48, 3)$?

Ex 2

Cette fois ci **tous les lapins meurent au bout de m mois avec $m \geqslant 2$**

On prendra $m = 3$ et on supposera que chaque couple adulte de lapins donne une portée de 1 couples de jeunes lapins

Comme dans le cours on a trois suites (J_n) le nombre de couples de jeunes lapins au mois n, (A_n) le nombre de couples adultes de lapin au mois n et C_n le nombre total de couples au mois n

L'initialisation est $J_0 = 1$,

1. Justifier que $J_n = A_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$
2. Justifier que $A_n = A_{n-1} + J_{n-1} - J_{n-m}$ pour $n \geqslant m$
3. A partir des relations de récurrence ci-dessus et des conditions initiales calculer à la main les valeurs de J_n et A_n jusqu'à $n = 6$ pour $m = 3$
   ($J_6 = 2$, $A_6 = 2$ et $C_6 = 4$)
4. Ecrire une fonction Python en déduire C_{48}

Ex 3

Utiliser l'outil le plus approprié pour étudier les variations des suites suivantes :

1. $u_n = 5n - 3$
2. $v_n = n^3 - 6n + 4$
3. $w_n = 2(0,8)^n$

Ex 4

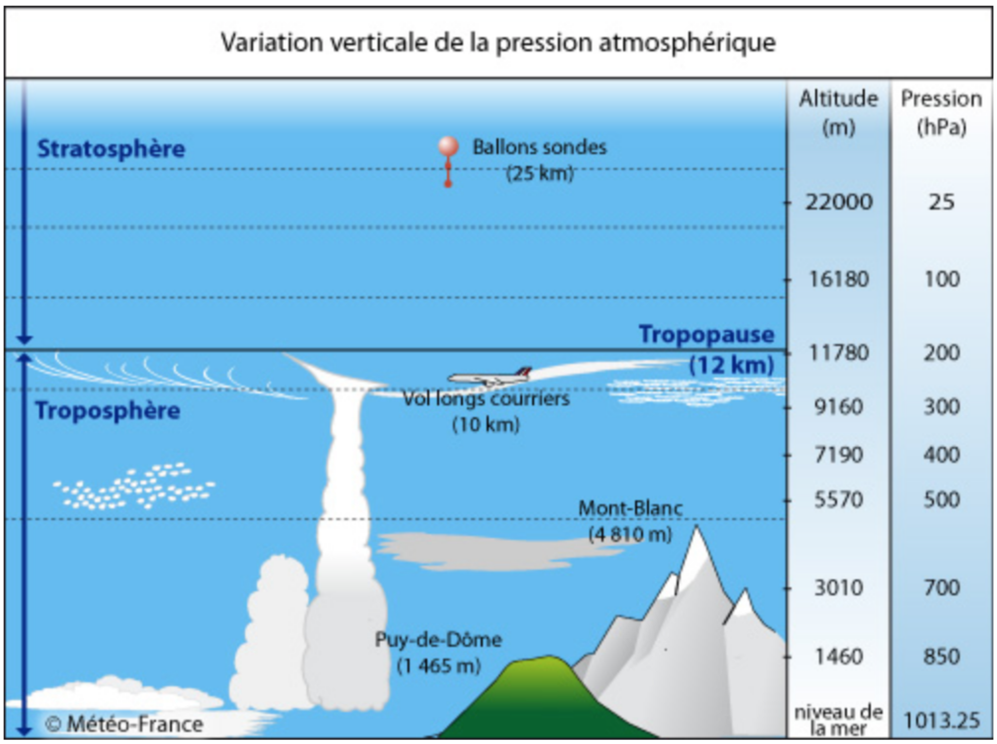
La population d'une ville imaginaire en milliers d'habitants en 2019 vaut p_n
On note p_{n+1} la population en 2020
Décrire par une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n chaque scénario d'évolution suivant :

1. La population entre 2019 et 2020 a augmenté de 5 %
2. La population entre 2019 et 2020 a diminuée de 7 %

Ex 5

Sur une page Web de Météo-France `http://www.meteofrance.fr/prevoir-le-temps/observer-le-temps/parametres-observes/pression` on peut lire
"En moyenne, la pression atmosphérique diminue de 1 hPa tous les 8 mètres."

1. Pour simplifier on prendra comme pression au sol $p_0 = 1013$ hPa.
   Et on note p_n la pression entre $n \times 8$ m et $(n+1) \times 8$ m
   Exprimer la citation de Météo-France sous la forme d'une relation de récurrence
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $p_n = 1013 - 8n$
3. A partir de quelle altitude la pression est en dessous de 500 hPa ? 200 hPa ?
   (Poser une inéquation et la résoudre)



Ex 6

La suite de Fibonnacci est définie par : $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$ et avec $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$

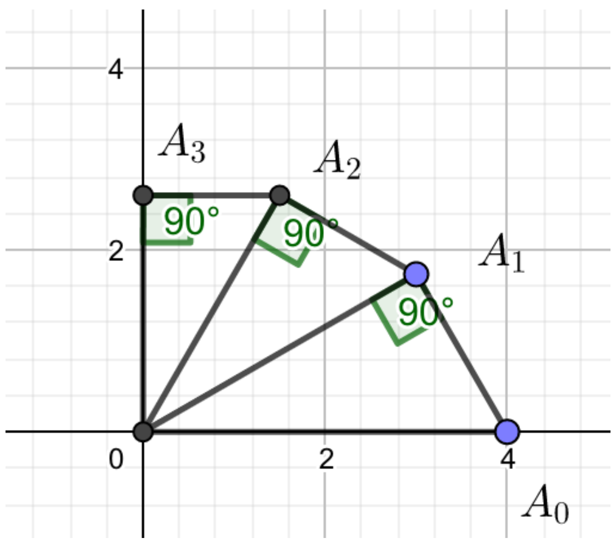
1. Calculer F_2, F_3, F_4 et F_5
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. On notera ϕ la solution positive (le nombre d'or) et $\overline{\phi}$ la solution négative
3. En admettant que $F_n = \dfrac{\phi^n + \overline{\phi}^n}{\sqrt{5}}$ on considère la suite $v_n = \dfrac{\phi^n}{\sqrt{5}}$
   Montrer que $\dfrac{F_n}{v_n} = 1 - (\dfrac{\overline{\phi}}{\phi})^n$
4. En admettant que $\overline{\phi}\phi = -1$ montrer que $\dfrac{\overline{\phi}}{\phi} = -(\overline{\phi})^2$ puis $\dfrac{F_n}{v_n} = 1 + (-1)^{n+1}(\overline{\phi})^{2n}$

5. Justifier que $|\overline{\phi}| < 1$. On admet que $\lim_{n \to +\infty} (\overline{\phi})^n = 0$
   Compléter le programme suivant qui retourne le plus petit exposant n tel que $|\phi|^n <$ seuil

```
def f(seuil):
     u = (sqrt(5) - 1)/2
     n = 1
     while u .... seuil:
            u = .....
            n = .....
     return n
```

6. D'une certaine manière quand n est "grand" alors $F_n \simeq v_n = \dfrac{\phi^n}{\sqrt{5}}$
   Justifier que $\dfrac{F_{n+1}}{F_n} \simeq \phi$

Ex 7



On construit une spirale avec des triangles rectangles comme sur la figure ci-dessus les angles $A_0\hat{0}A_1 = A_1\hat{0}A_2 = A_2\hat{0}A_3 = 30$ degrés et $0A_0 = 4$

1. Construire le triangle suivant
2. Justifier avec la trigonométrie que $A_0A_1 = \dfrac{OA_0}{2}$, $OA_1 = \dfrac{\sqrt{3}OA_0}{2}$ et $A_1A_2 = \dfrac{\sqrt{3}OA_0}{2^2}$
3. Plus généralement $OA_n = \dfrac{(\sqrt{3})^n OA_0}{2^n}$ et $A_nA_{n+1} = \dfrac{(\sqrt{3})^n OA_0}{2^{n+1}}$
4. On considère la suite $l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + ... + A_{n-1}A_n$ la longueur de la spirale
   Justifier que $l_n = \dfrac{OA_0}{2}(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + (\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2 + ... + (\dfrac{\sqrt{3}}{2})^{n-1}$
5. En développant et simplifiant montrer que $(1+x+x^2+....+x^{n-1})(1-x) = 1-x^n$

6. En déduire que $1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} = \dfrac{1 - x^n}{1 - x}$
7. En déduire que $l_n = 2\dfrac{1 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^n}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$
8. Que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} l_n$?

Ex 8
La suite (u_n) est géométrique et de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$
Quelle est la raison de cette suite ?

Ex 9
Simplifier les sommes suivantes puis calculer leur limite :

1. $S_n = 1 + \dfrac{2}{3} + (\dfrac{2}{3})^2 + ... + (\dfrac{2}{3})^n$
2. $T_n = (\dfrac{1}{3})^2 + ... + (\dfrac{1}{3})^n$
3. $U_n = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + (\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2 + ... + (\dfrac{\sqrt{2}}{2})^n$

Ex 10
Calculer les limites des suites suivantes

1. $u_n = 2^n - n$
2. $v_n = e^n - n$
3. $w_n = \dfrac{n^2 + 3n - 1}{2n^2 + 1}$
4. $r_n = \dfrac{n^2 + 3n - 1}{n + 1}$
5. $s_n = \dfrac{n^2 + 3n - 1}{2n^2 + 1}$

Ex 11
Par encadrement et/ou minoration calculer les limites des suites :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$
2. $v_n = n + \sin(n)$
3. $w_n = \dfrac{\sin(1)}{n^2} + \dfrac{\sin(2)}{n^2} + ... + \dfrac{\sin(n)}{n^2}$
4. $s_n = \dfrac{n}{n^2 + 1} + \dfrac{n}{n^2 + 2} + ... + \dfrac{n}{n^2 + n}$

Ex 12
Est ce que la suite $u_n = n \times \sin(n)$ a une limite ?