Contrôle 1 : Spécialité mathématiques - TS3 -TS4 - (sujet A)
1 point pour la propreté de la copie et la rédaction
Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre

EX 1 (3 points)

Vrai ou faux ? : Si c'est vrai donner une preuve, sinon donner un contre-exemple :
Pour tout a et b entiers relatifs si 3 divise $a^2 + b^2$ alors 3 divise a et 3 divise b

EX 2 (4 points)

Trouver tous les entiers naturels n tel que $n + 1|n^2 + 2$
(On pourra utiliser : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $n^2 + 2 = (n + 1)(n - 1) + 3$

EX 3(4 points)

La suite (s_n) est définie par récurrence par :
$s_0 = 2$ et $s_{n+1} = s_n \times (s_n - 1) + 1$ pour tout $n \geqslant 0$
Démontrer par récurrence que : pour tout $n \geqslant 2$ $s_n \equiv 7$ [9]

EX 4 (4 points)

1. En admettant que $5^5 \equiv 1$ [11], justifier que $5^{8102} \equiv 3$ [11]
2. En déduire que $2018^{8102} \equiv 3$ [11]
3. Justifier que $6 \equiv -5$ [11], en déduire que $6^8 \equiv 4$ [11] et $8102^{2018} \equiv 4$ [11]
4. En déduire que $2018^{8102} + 8102^{2018} \equiv 7$ [11]

EX 5 (4 points)

Pour tout a et b entiers relatifs et n et d entiers naturels non nuls,

1. Montrer que si $a \equiv b$ $[n]$ et si $d|n$ alors $a \equiv b$ $[d]$
2. La réciproque est-elle vraie ?

Correction - sujet A
EX 1 (3 points)

Vrai En effet les entiers relatifs a et b ont pour reste par la division euclidienne soit 0 soit 1 soit 2.

Autrement dit $a \equiv 0$ [3] ou $a \equiv 1$ [3] ou $a \equiv 2$ [3] (idem pour b)
Donc $a^2 \equiv 0$ [3] ou $a^2 \equiv 1$ [3] ou $a^2 \equiv 4 \equiv 1$ [3] (idem pour b^2
Donc $a^2 + b^2 \equiv 0$ [3] ou $a^2 + b^2 \equiv 1$ [3] ou $a^2 + b^2 \equiv 2$ [3]
Par conséquent si $a^2 + b^2 \equiv 0$ [3] cela ne peut venir que de $a \equiv 0$ [3] et $b \equiv 0$ [3]

EX 2 (4 points)

On cherche tous les entiers naturels n tel que $n + 1|n^2 + 2$ autrement dit de telle sorte qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que
$n^2 + 2 = k(n + 1)$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $n^2 + 2 = (n + 1)(n - 1) + 3$
Donc $k(n + 1) = (n + 1)(n - 1) + 3$ donc $(n + 1)(k - (n - 1)) = 3$
Donc $n + 1$ est un diviseur de 3
Donc $n + 1 = 1$ ou $n + 1 = 3$ donc $n = 0$ ou $n = 2$
Réciproquement on vérifie que pour $n = 0$, $n + 1 = 1$ divise $n^2 + 2 = 2$ et pour $n = 2$, $n + 1 = 3$ divise $n^2 + 2 = 6$

EX 3(4 points)

La suite (s_n) est définie par récurrence par :
$s_0 = 2$ et $s_{n+1} = s_n \times (s_n - 1) + 1$ pour tout $n \geqslant 0$

1. Vrai pour $n = 2$ on a $s_2 = 7 \equiv 7$ [9]
2. Supposons que pour un entier quelconque $k \geqslant 2$ on a $s_k \equiv 7$ [9]
   Alors $s_{k+1} = s_k \times (s_k - 1) + 1 \equiv\ 7 \times 6 + 1 \equiv 7$ [9]
3. D'après l'axiome de récurrence pour tout $n \geqslant 2$ on a $s_n \equiv 7$ [9]

EX 4 (4 points)

1. Puisque $5^5 \equiv 1$ [11] et $8102 = 1620 \times 5 + 2$ donc $5^{8102} = (5^5)^{1620} \times 5^2 \equiv 3$ [11]
2. $2018 \equiv 5$ [11] donc $2018^{8102} \equiv 5^{8102} \equiv 3$ [11]
3. Puisque $6 = -5 + 11$ donc $6 \equiv -5$ [11], donc $6^8 \equiv (-5)^8 \equiv 5^8 \equiv 5^3 \equiv 4$ [11]
   Or $8102 \equiv 6 \equiv -5$ [11] donc $8102^{2018} \equiv (5)^{2018} \equiv 5^3 \equiv 4$ [11]
4. Donc $2018^{8102} + 8102^{2018} \equiv 3 + 4 \equiv 7$ [11]

EX 5 (4 points)
Pour tout a et b entiers relatifs et n et d entiers naturels non nuls,

1. Si $a \equiv b$ $[n]$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kn$, si $d|n$ alors il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $n = ld$ donc $a = b + (kl)d$ autrement dit $a \equiv b$ $[d]$
2. La réciproque n'est pas vraie, voici un contre-exemple $5 \equiv 3$ [2] mais 5 n'est pas congru à 3 modulo 4

Contrôle 1 : Spécialité mathématiques - TS3 -TS4- (sujet B)
1 point pour la propreté de la copie et la rédaction
Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre

EX 1 (3 points)

Vrai ou faux ? : Si c'est vrai donner une preuve, sinon donner un contre-exemple
Pour tout a et b entiers relatifs si 4 divise $a^2 + b^2$ alors 4 divise a et 4 divise b

EX 2 (4 points)

Trouver tous les entiers naturels n tel que $n - 1|n^2 + 3$
(On pourra utiliser : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $n^2 + 2 = (n+1)(n-1) + 4$

EX 3(4 points)

Une suite (s_n) est définie par récurrence par :
$s_0 = 8$ et $s_{n+1} = s_n \times (s_n + 1) - 1$ pour tout $n \geqslant 0$
Démontrer par récurrence que : pour tout $n \geqslant 0 \quad s_n \equiv 8\ [9]$

EX 4 (4 points)

1. En admettant que $7^{10} \equiv 1\ [11]$, justifier que $7^{202} \equiv 5\ [11]$
2. En déduire que $2020^{202} \equiv 5\ [11]$
3. Justifier que $4 \equiv -7\ [11]$, en déduire que $4^{10} \equiv 1\ \ [11]$ et $202^{2020} \equiv 1\ [11]$
4. En déduire que $2020^{202} + 202^{2020} \equiv 6\ [11]$

EX 5 (4 points)
Pour tout a et b entiers relatifs et n et d entiers naturels non nuls,

1. Montrer que si $a \equiv b\ [n]$ et si $d|n$ alors $a \equiv b\ [d]$
2. La réciproque est-elle vraie ?

Correction - sujet B

EX 1 (3 points)

Faux

Voici un contre-exemple : Pour $a = 6$ et $b = 10$, chacun de ces deux nombres n'est pas divisible par 4, par contre $a^2 + b^2 = 136 = 34 \times 4$

EX 2 (4 points)

On cherche tous les entiers naturels n tel que $n-1|n^2+3$ autrement dit de telle sorte qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$n^2 + 3 = k(n-1)$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $n^2 + 3 = (n+1)(n-1) + 4$

Donc $k(n-1) = (n+1)(n-1) + 4$ donc $(n-1)(k-(n-1)) = 4$

Donc $n-1$ est un diviseur de 4

Donc $n-1 = 1$ ou $n-1 = 2$ ou $n-1 = 4$ donc $n = 2$ ou $n = 3$ ou $n = 5$

Réciproquement on vérifie que pour $n = 2$, $n-1 = 1$ divise $n^2+3 = 7$ et pour $n = 3$, $n-1 = 3$ divise $n^2 + 3 = 12$ et $n = 5$, $n-1 = 4$ divise $n^2 + 3 = 28$

EX 3(4 points)

La suite (s_n) est définie par récurrence par :

$s_0 = 8$ et $s_{n+1} = s_n \times (s_n + 1) - 1$ pour tout $n \geqslant 0$

1. Vrai pour $n = 0$ on a $s_0 = 8 \equiv 8$ [9]
2. Supposons que pour un entier quelconque $k \geqslant 2$ on a $s_k \equiv 8$ [9]
   Alors $s_{k+1} = s_k \times (s_k + 1) - 1 \equiv\ 8 \times 9 - 1 \equiv -1 \equiv 8$ [9]
3. D'après l'axiome de récurrence pour tout $n \geqslant 0$ on a $s_n \equiv 8$ [9]

EX 4 (4 points)

1. Puisque $7^{10} \equiv 1$ [11] et $202 = 10 \times 20 + 2$ donc $7^{202} = (7^{10})^{20} \times 7^2 \equiv 5$ [11]
2. $2020 \equiv 7$ [11] donc $2020^{202} \equiv 7^{202} \equiv 5$ [11]
3. Puisque $4 = -7 + 11$ donc $4 \equiv -7$ [11], donc $4^{10} \equiv (-7)^{10} \equiv 7^{10} \equiv 1$ [11]
   Or $202 \equiv 4 \equiv -7$ [11] donc $202^{2020} \equiv (7)^{2020} \equiv 1$ [11]
4. Donc $2020^{202} + 202^{2020} \equiv 5 + 1 \equiv 6$ [11]

EX 5 (4 points)

Pour tout a et b entiers relatifs et n et d entiers naturels non nuls,

1. Si $a \equiv b$ $[n]$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kn$, si $d|n$ alors il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $n = ld$ donc $a = b + (kl)d$ autrement dit $a \equiv b$ $[d]$
2. La réciproque n'est pas vraie, voici un contre-exemple $5 \equiv 3$ [2] mais 5 n'est pas congru à 3 modulo 4