DM n°3- TS - spécialité maths

Le but du D.M est d'étudier une suite de vecteurs $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ où (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels, définie à partir de la relation de récurrence $X_{n+1} = AX_n + V$ où A est une matrice carrée d'ordre 2 et V un vecteur colonne.

Dans la partie A on traite le cas général des suites arithmético-géométriques

Dans la partie B on traite le cas analogue avec une suite de vecteurs

Partie A

Soit (u_n) une suite de réels définie par la relation de récurrence

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$ (on évite ainsi les suites arithmétiques et géométriques)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (point fixe) $x = ax + b$. On note q la solution
2. On pose $v_n = u_n - q$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison a.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de u_0, a et b
4. Discuter en fonction de a, la limite de (u_n) lorsque $n \to +\infty$

Partie B

1. Donner un cas particulier d'une matrice A telle qu' il n'existe pas de vecteur W tel que $W = AW + V$ (*)
2. On suppose que la matrice $I - A$ est inversible. Résoudre (*) en exprimant W en fonction de V et $I - A$
3. On pose $Y_n = X_n - W$. Vérifier que $Y_{n+1} = AY_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
4. On admet que $Y_n = A^n Y_0$. En déduire l'expression de X_n en fonction de X_0, A^n et W
5. On suppose que A est diagonalisable c'est à dire qu'il existe S inversible telle que $S^{-1}AS = D$ est une matrice diagonale

   En déduire l'expression de X_n en fonction de X_0, D^n, S et W
6. On suppose que A est une matrice stochastique suivant les colonnes, en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n$

Correction

Partie A

1. $x = ax + b \iff x = \dfrac{b}{1-a}$ Puisque $a \neq 1$. On pose $q = \dfrac{b}{1-a}$ et on a $q = aq + b$
2. On pose $v_n = u_n - q$.
   $v_{n+1} = u_{n+1} - q = au_n + b - (aq + b) = a(u_n - q) = av_n$. Donc la suite (v_n) est géométrique de raison a
3. Donc $v_n = a^n v_0 = a^n(u_0 - q)$ donc $u_n = v_n + q = a^n(u_0 - q) + q$
4. (a) Si $u_0 = q$ la suite u_n est constante et égale à q pour tout $a \neq 1$
   (b) Si $|a| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$ et par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n(u_0 - q) = 0$ et par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = q$
   (c) Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$
      i. Si $u_0 > q$ par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n(u_0 - q) = +\infty$ et par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
      ii. Si $u_0 < q$ par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n(u_0 - q) = -\infty$ et par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
   (d) Si $a = -1$ alors la suite (u_n) est alternée $u_{2p} = u_0$,$u_{2p+1} = -u_0 + b$ donc divergente
   (e) Si $a < -1$ alors a^{2n} tend vers $+\infty$ et a^{2n+1} tend vers $-\infty$, donc a^n n'a pas de limite et u_n aussi

Partie B

1. Si $A = I$ et V un vecteur non nul alors il est impossible d'avoir $W = W + V$
2. Si $I - A$ est inversible alors $W = AW + V \iff (I - A)W = V \iff W = (I - A)^{-1}V$
3. On pose $Y_n = X_n - W$. Donc $Y_{n+1} = X_{n+1} - W = AX_n + V - (AW + V) = A(X_n - W) = AY_n$
4. Puisque $Y_n = A^n Y_0$. $X_n = A^n(X_0 - W) + W$
5. On suppose que A est diagonalisable c'est à dire qu'il existe S inversible telle que $S^{-1}AS = D$ est une matrice diagonale
   donc $A^n = SD^nS^{-1}$ et $X_n = SD^nS^{-1}(X_0 - W) + W$
6. On suppose que A est une matrice stochastique suivant les colonnes, donc $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ avec p et q dans $]0;1[$
   On a vu en cours que 1 est valeur propre donc $I - A$ ne peut pas être inversible et on ne peut pas utiliser le point fixe W
   Par contre si $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ avec $v_1 = -v2$ alors il existe une infinité de vecteurs W tel que $W = AW + V$ en effet :

$w_1 = (1-p)w_1 + qw_2 + v_1$ et $w_2 = pw_1 + (1-q)w_2 + v_2$
Donc $-pw_1 + qw_2 = -v_1$ et $pw_1 - qw_2 = -v_2 = v_1$
On a une infinité de solutions on peut choisir $w_1 = 1$ et $w_2 = \dfrac{p - v_1}{q}$ puisque
$\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = \dfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = \dfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix}(X_0 - W) + W$
Si $v_1 \neq -v_2$ alors X_n n'a pas de limite L car sinon d'après l'unicité de la limite L vérifie $L = AL + V$ qui n'a pas de solution