DM1- spécialité Maths (TS4-5-6) à rendre le Jeudi 7/11/19

Partie 1 : La suite de Fibonnacci

La suite de Fibonnacci est définie par récurrence ainsi :
$F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour $n \in \mathbb{N}$

1. Calculer à la main F_{10}
2. En utilisant la fonction `fiboListe(n)` qui retourne la liste des termes de F_0 jusqu'à F_n que valent F_{30} et F_{100} ?
3. Définir une fonction Python `fibo(n)` qui retourne F_n pour $n \geqslant 2$ sans utiliser de liste et avec 3 variables u,v et temp
4. On note $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\overline{\phi}$ les solutions conjuguées de $x^2 - x - 1 = 0$. Démontrer par récurrence (forte) que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $F_n = \dfrac{\phi^n - \overline{\phi}^n}{\sqrt{5}}$ (Voir sur wikipédia la récurrence forte)
5. On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes lorsque $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. Montrer que la suite de Fibonnacci est équivalente à la suite géométrique de raison ϕ et de premier terme $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ (Intuitivement cela signifie que lorsque "n est grand" alors $u_n \simeq v_n$
6. Ecrire alors une fonction Python `fiboGeo(n)` qui calcule F_n de manière approchée comme étant égal au terme de rang n de la suite géométrique de raison ϕ et de premier terme $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Comparer `fiboGeo(30)` et `fibo(30)`
7. En utilisant la fonction `pgcd(a,b)` fournie qui retourne le pgcd de a et b mais aussi le nombre de divisions effectuées dans l'algorithme d'Euclide, que retournent `pgcd(`F_{30}`,`F_{29}`)` et `pgcd(`F_{100}`,`F_{99}`)` Que peut on conjecturer ? (on dit que deux entiers a et b sont premiers entre eux lorsque leur pgcd est 1)
8. Ecrire une fonction `nbChiffres(n)` qui retourne le nombre de chiffres de l'entier naturel n (on divisera par 10 tant que c'est possible et on comptera le nombre de divisions effectuées)
9. Conjecturer une loi expérimentale qui donne le nombre de chiffres de F_n en fonction de n.Comparer ce que prévoit votre loi et le nombre exact de chiffres de F_{200} puis de F_{1000}

Partie 2 : Algorithme d'Euclide et suite de Fibonnacci

1. Justifier que pour tout $n \geqslant 4$ la division euclidienne de F_n par F_{n-1} a pour quotient 1 et pour reste F_{n-2}
2. En déduire que l'algorithme d'Euclide appliqué à F_n et F_{n-1} retourne 1 en $n-2$ divisions pour $n \geqslant 3$
3. Démontrer par récurrence sur $n \geqslant 1$:
   Etant donné deux entiers naturels a et b tel que $a > b \geqslant 1$, si le calcul du pgcd de a et b par l'algorithme d'Euclide se fait en n divisions alors $a \geqslant F_{n+2}$ et $b \geqslant F_{n+1}$

Correction

1. $F_{10} = 55$
2. D'après le programme $F_{30} = 832040$, $F_{100} = 354224848179261915075$
3.
```
def fibo(n):
    if n == 0:
    return 0
    else:
        u = 0
        v = 1
        for i in range(n-1):
            temp = u + v
            u = v
            v = temp
        return v
```
4. $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\overline{\phi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
   (a) Vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ car on a $F_0 = 0$ et $\dfrac{\phi^0 - \overline{\phi}^0}{\sqrt{5}} = 0$ et $F_1 = 1$ et $\dfrac{\phi - \overline{\phi}}{\sqrt{5}} = 1$
   (b) Montrons que pour tout $n \geqslant 1$ **si** $F_n = \dfrac{\phi^n - \overline{\phi}^n}{\sqrt{5}}$**alors** $F_{n+1} = \dfrac{\phi^{n+1} - \overline{\phi}^{n+1}}{\sqrt{5}}$
   Or $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = \dfrac{\phi^n - \overline{\phi}^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{\phi^{n+1} - \overline{\phi}^{n+1}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\phi^n + \phi^{n-1}}{\sqrt{5}} - \dfrac{\overline{\phi}^n + \overline{\phi}^{n-1}}{\sqrt{5}}$
   Or $x^n + x^{n-1} = x^{n-1}(x+1)$ si x est solution de $x^2 - x - 1 = 0$ alors $x + 1 = x^2$ donc $x^{n-1}(x+1) = x^{n-1}x^2 = x^{n+1}$
   Donc $F_{n+1} = \dfrac{\phi^{n+1} - \overline{\phi}^{n+1}}{\sqrt{5}}$
   (c) D'après l'axiome de récurrence(fort) la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$
5. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{\phi^n}{\sqrt{5}}$
   Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F_n}{v_n} = 1$
   Or $\dfrac{F_n}{v_n} = 1 - (\dfrac{\overline{\phi}}{\phi})^n$ et $\dfrac{\overline{\phi}}{\phi} = -\dfrac{6-2\sqrt{5}}{4}$ or $6 - 2\sqrt{5} < 2$ donc $|\dfrac{\overline{\phi}}{\phi}| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{\overline{\phi}}{\phi})^n = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F_n}{v_n} = 1$
6.
```
def fiboGeo(n):
    u=1/sqrt(5)
    phi = (1+sqrt(5))/2
    for i in range(n):
        u = u*phi
    return u
```

Avec fiboGeo(30) on obtient 832040,0000

7. On conjecture que :
   (a) F_{n+1} et F_n sont premiers entre eux
   (b) Le nombre de divisions pour obtenir le pgcd de F_{n+1} et F_n par l'algorithme d'Euclide est $n-1$

```
def nbChiffres(n):
    nombre = n
    nbChiffres = 1
    while nombre >= 10:
        nombre = nombre // 10
        nbChiffres = nbChiffres + 1
    return nbChiffres
```

8. On conjecture que le nombre de chiffres de F_n est à peu près $\dfrac{n}{5}$
   Le nombre exact de chiffres pour F_{200} est 42 celui de F_{1000} est 209

PARTIE 2

1. Par récurrence (forte) on montre que (F_n) est une suite strictement positive à partir de $n=1$ on en déduit que (F_n) est une suite strictement croissante à partir de $n=3$ et $\dfrac{F_{n+1}}{F_n} < 2$ pour $n \geqslant 3$
   Donc d'après le théorème de la division euclidienne il existe q entier naturel unique et r entier naturel unique tel que $0 \leqslant r < F_n$ tel que $F_{n+1} = F_n \times q + r$ donc $q < \dfrac{F_{n+1}}{F_n} < 2$ donc $q = 1$
   Mais par définition $F_{n+1} = F_n \times 1 + F_{n-1}$ donc $r = F_{n-1}$
2. On écrit la suite de divisions
   $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
   $F_{n-1} = F_{n-2} + F_{n-3}$
   ....
   $F_4 = 3 = F_3 + F_2$
   $F_3 = 2 \times F_2$
   Il y a en tout $n-3+1$ lignes c'est à dire $n-2$ divisions
3. (a) Vrai pour $n=1$ En effet $a = 2 > b = 1$ vérifie bien $a = 2 \geqslant F_3 = 2$ et $b = 1 \geqslant F_2 = 1$
   (b) Supposons que la propriété est vraie au rang $n \geqslant 1$ montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$
   Soit deux entiers naturels a et b tel que $a > b \geqslant 1$, si le calcul du pgcd de a et b par l'algorithme d'Euclide se fait en $n+1$ divisions
   $a = bq + r_1$
   $b = r_1 q_1 + r_2$
   ....
   $r_n = r_{n+1} q_{n+1}$ avec $r_{n+1} = \text{pgcd}(a,b)$
   D'après l'hypothèse de récurrence $b \geqslant F_{n+2}$ et $r_1 \geqslant F_{n+1}$
   Or $q \geqslant 1$ donc $a = bq + r_1 \geqslant b + r_1 \geqslant F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$
   (c) D'après l'axiome de récurrence la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$