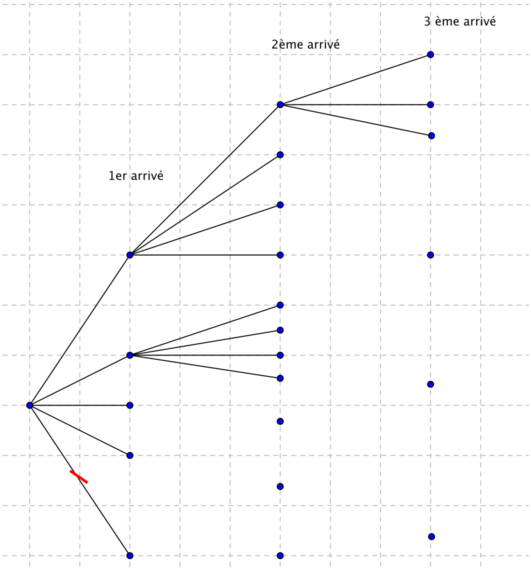
Problèmes de dénombrement

Vallon

27 février 2015

1. Arrangement
2. Permutation
3. Combinaison
4. Propriétés des coefficients binomiaux

Problème : 5 chevaux au départ d'une course, combien y a t il de tiercés ?



$5 \times 4 \times 3 = 60$ tiercés

Définition

$E = \{e_1, e_2, ...e_n\}$ un ensemble à n éléments

- Un p-uplet notée $(x_1, x_2, ..., x_p)$ est la donnée de n éléments de E (ordre et répétition possible)
- Un arrangement de p éléments parmi n éléments est un p-uplet sans répétition de n éléments de E (par exemple tiercés) avec $p \leqslant n$

Théorème

Le nombre total d' arrangements de p éléments parmi n éléments est $n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1)$ *avec* $p \leqslant n$

$n=5 \quad p=3$

$5 \times 5-1 \times \underbrace{5-3+1}_{5-2} = 5 \times 4 \times 3 = 60$

Démonstration.

Avec un arbre comme pour les tiercés

Définition

$E = \{e_1, e_2, ...e_n\}$ un ensemble à n éléments

$p = n$

- Une permutation de E est un arrangement de n éléments parmi n

Théorème

Le nombre total de permutations est $n! = n \times (n-1) \times ... \times 3 \times 2 \times 1$ *(lire factorielle n)*

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Définition

$E = \{e_1, e_2, ...e_n\}$ un ensemble à n éléments

- Une combinaison de p éléments parmi n éléments de E est une partie de E ayant p éléments

Par exemple si $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
un arrangement de 3 éléments parmi les 5 éléments de E est $(2, 3, 1)$
Par contre on note $\{1, 2, 3\}$ une combinaison de 3 éléments de E (pas d'ordre)

Théorème

Le nombre total de combinaisons de p éléments parmi n éléments est
$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-p+1)}{p!}}$

Démonstration.

On classe les $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$ ~~combinaisons~~ arrangements de p éléments parmi n éléments de E en N paquets où N est le nombre total de combinaisons et chaque paquet contient les combinaisons faites à partir des mêmes éléments, par conséquent chaque paquet est l'ensemble des permutations sur les mêmes p éléments . Dans chaque paquet il y a $p!$ combinaisons. Finalement on a $N \times p! = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$ d'où le résultat □

6 (1,2,3) (3,1,2) (1,3,2) (2,3,1) (2,1,3) (3,2,1) . . . . . . (1,2,5) . . .

{1,2,3} {1,2,5}

$\to 5\times4\times3 = 60$

$\to N = \binom{5}{3} = 10$

Théorème

- $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

$\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$

- $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ *(triangle de Pascal)*
- $\binom{n}{p} = p\binom{n}{p-1}$ *(espérance loi binomiale)*
- $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Démonstration.

Exercice □

Triangle de Pascal

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & p=0 & p=1 & & & \\
n=1 & \binom{1}{0}=1 & \binom{1}{1}=1 & & & \\
2 & \binom{2}{0}=1 & \binom{2}{1}=2 & \binom{2}{2}=1 & & \\
3 & \binom{3}{0}=1 & \binom{3}{1}=3 & \binom{3}{2}=3 & \binom{3}{3}=1 & \\
4 & \binom{4}{0}=1 & \binom{4}{1}=4 & \binom{4}{2}=6 & \binom{4}{3}=4 & \binom{4}{4}=1
\end{array}$$

etc...