Limite d'une fonction en un point . Continuité

Vallon

1er novembre 2014

Définition

f une fonction définie $]0;+\infty[$.
Si pour tout $A>0$ il existe un intervalle ouvert $]0;r[$ tel que pour tout $x\in]0;r[$ on a $f(x)>A$ on dit
que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0^+
On note $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$
On dit que la courbe représentative C_f de f admet une asymptote verticale d'équation $x=0$

Montrons que $x\to\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0^+ à l'aide de la définition :

Démonstration.

Soit $A>0$, $\dfrac{1}{x}>A \iff x<\dfrac{1}{A}$, donc il existe $r=\dfrac{1}{A}$ tel que pour tout $x<r$ on a $f(x)>A$ $\square$

Théorème

- *Les fonctions* $x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \to \dfrac{1}{x^2}$, *et plus généralement* $x \to \dfrac{1}{x^n}$ *tendent vers* $+\infty$ *lorsque* x *tend vers* 0^+
- *Les fonctions* $x \to \dfrac{1}{x^2}$, *et plus généralement* $x \to \dfrac{1}{x^{2n}}$ *tendent vers* $+\infty$ *lorsque* x *tend vers* 0^-
- *Les fonctions* $x \to \dfrac{1}{x}$, *et plus généralement* $x \to \dfrac{1}{x^{2n+1}}$ *tendent vers* $-\infty$ *lorsque* x *tend vers* 0^-

Définition

Si f a la même limite infinie de part et d'autre de 0 on dit que $f(x)$ tend vers cette limite commune lorsque x tend vers 0

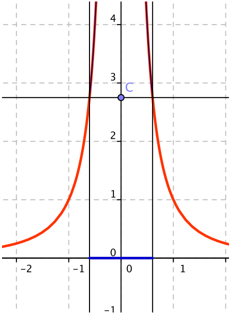

Figure: $x \rightarrow \dfrac{1}{x^2}$

Définition

f définie sur un intervalle contenant 0 (f peut ne pas être définie en 0)
Si pour tout intervalle $]l-R;l+R[$ il existe $r>0$ tel que :
pour tout x si $x \in]-r;r[$ avec $x \neq 0$ alors $f(x) \in]l-R;l+R[$
Alors on dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers 0

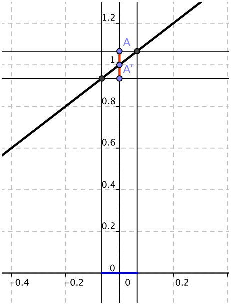

Figure: $x \to x+1$

Exemples :

- $x \to x + 1$ a pour limite 1 lorsque x tend vers 0
- $x \to xsin(\frac{1}{x})$ a pour limite 0 lorsque x tend vers 0 (fonction non définie en 0)
- $x \to \frac{sin(x)}{x}$ a pour limite 1 lorsque x tend vers 0 (fonction non définie en 0)

Définition

- Si $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ alors f est dite continue en 0
- Si f est continue en chaque point d'un intervalle I alors on dit que f est continue sur I

Théorème

- *Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$.*
- $f(x) = x^3 - 2x + 3$ *tend vers* $f(0) = 3$ *lorsque* x *tend vers 0*
- *Les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition*
- $g(x) = \dfrac{x^2 - 2}{2x + 1}$ *tend vers* $g(0) = -2$ *lorsque* x *tend vers 0*
- *Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$*

Théorème

Algèbre

Si f_1 a pour limite l_1 et f_2 a pour limite l_2 lorsque x tend vers 0 alors

- *$f_1 + f_2$ a pour limite $l_1 + l_2$*
- *$f_1 \times f_2$ a pour limite $l_1 \times l_2$*
- *si $l_1 \neq 0$ alors $\dfrac{1}{f_1}$ a pour limite $\dfrac{1}{l_1}$*
- *si $l_2 \neq 0$ alors $\dfrac{f_1}{f_2}$ a pour limite $\dfrac{l_1}{l_2}$*

Exemple : $f(x) = cos(x) + \dfrac{x+1}{x^2+1}$

la fonction cosinus étant continue en 0 donc $cos(x)$ tend vers $cos(0) = 1$

$x \to \dfrac{x+1}{x^2+1}$ est une fonction rationnelle définie en 0 donc elle a pour limite l'image de 0 par cette fonction donc 1

Donc $f(x)$ tend vers 2 lorsque x tend vers 0

- Comment analyser $x \to cos(2x+\pi)$?
- $x \to 2x+\pi = y \to cos(y)$
- On dit que l'on a composé les deux fonctions élémentaires $x \to 2x+\pi$ et cosinus

Théorème

- *Si $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers 0, et si $g(x)$ tend vers l' lorsque x tend vers l alors $g(f(x))$ tend vers l' lorsque x tend vers 0*
- *Si f est continue en 0 et g est continue en $f(0)$ alors $x \to g(f(x))$ est continue en 0*

Application :

- *$x \to cos(2x+\pi)$ est continue sur $\mathbb{R}$*
- *Si x tend vers $+\infty$ alors $\frac{1}{x}$ tend vers 0 or la fonction sinus a pour limite 0 lorsque x tend vers 0 donc par composition $x \to sin(\frac{1}{x})$ a pour limite 0 lorsque x tend vers $+\infty$*

Théorème

Encadrement

$$m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$$

Si $m(x)$ tend vers l et $M(x)$ tend vers l lorsque x tend vers 0 alors $f(x)$ tend vers l

Exemple : Pour $x \neq 0$

$-1 \leqslant sin(\frac{1}{x}) \leqslant 1$

Si $x > 0$ alors $-x \leqslant xsin(\frac{1}{x}) \leqslant x$

Si $x < 0$ alors $x \leqslant xsin(\frac{1}{x}) \leqslant -x$

Or $-x$ et x tendent vers 0 lorsque x tend vers 0

Donc $xsin(\frac{1}{x})$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0

On peut réécrire toutes les définitions et théorèmes vues en 0 en tout point $a \in \mathbb{R}$

Théorème

- *Les fonctions* $x \to \dfrac{1}{\sqrt{x-a}}$, $x \to \dfrac{1}{x-a}$, *et plus généralement* $x \to \dfrac{1}{(x-a)^n}$ *tendent vers* $+\infty$ *lorsque* x *tend vers* a^+
- *Les fonctions* $x \to \dfrac{1}{(x-a)^2}$, *et plus généralement* $x \to \dfrac{1}{(x-a)^{2n}}$ *tendent vers* $+\infty$ *lorsque* x *tend vers* a^-
- *Les fonctions* $x \to \dfrac{1}{(x-a)}$, *et plus généralement* $x \to \dfrac{1}{(x-a)^{2n+1}}$ *tendent vers* $-\infty$ *lorsque* x *tend vers* a^-

Définition

Si f a la même limite infinie de part et d'autre de a on dit que $f(x)$ tend vers cette limite commune lorsque x tend vers a

Exemples :

- $x \to \dfrac{1}{(x+2)^2}$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers -2
- $x \to \dfrac{-1}{(x-2)^2}$ a pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers 2