Limite finie ou infinie d'une fonction à l'infini

Vallon

12 octobre 2014

- $n \to u_n$ est remplacé par $x \to f(x)$ où $x \in I$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$
- x tend vers l'infini $+\infty$ ou $-\infty$ comme n tend vers $+\infty$
- Soit f a une limite finie
- Soit f a une limite infinie
- Soit f n'a pas de limite

Définition

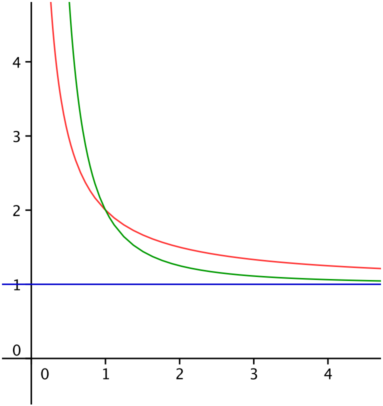
On dit que f a pour limite l lorsque x tend vers $+\infty$ si pour tout intervalle ouvert $]l-r;l+r[$ centré sur l il existe un réel $A>0$ tel que pour tout $x>A$ on a $f(x)\in]l-r;l+r[$
Deux notations peuvent être utilisées

- Si $x\to+\infty$ alors $f(x)\to l$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$

Définition

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ on dit que C_f la courbe représentative de f admet pour asymptote la droite d'équation $y=l$

Asymptote



Les courbes C_f et C_g définies par $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$ (en rouge) et $g(x) = \dfrac{1}{x^2} + 1$ ont pour asymptote la droite d'équation $y = 1$

Montrons à l'aide de la définition que $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ tend vers 0 si x tend vers $+\infty$

Etant donné $r > 0$

$\dfrac{1}{x^2} < r \iff x^2 > \dfrac{1}{r} \iff x > \dfrac{1}{\sqrt{r}}$

Autrement dit étant donné $r > 0$ il existe $A = \dfrac{1}{\sqrt{r}}$ tel que pour tout $x > A$ on a $\dfrac{1}{x^2} < r$

Théorème

- $x \to \dfrac{1}{x}$, $x \to \dfrac{1}{x^2}$ *et* $x \to \dfrac{1}{x^n}$ *ont pour limite 0 en* $+\infty$

Théorème

Algèbre

Si f_1 a pour limite l_1 et f_2 a pour limite l_2 lorsque x tend vers $+\infty$ alors

- *$f_1 + f_2$ a pour limite $l_1 + l_2$*
- *$f_1 \times f_2$ a pour limite $l_1 \times l_2$*
- *si $l_1 \neq 0$ alors $\dfrac{1}{f_1}$ a pour limite $\dfrac{1}{l_1}$*
- *si $l_2 \neq 0$ alors $\dfrac{f_1}{f_2}$ a pour limite $\dfrac{l_1}{l_2}$*

Exemple : $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1} = \dfrac{x(2+\frac{3}{x})}{x(1+\frac{1}{x})} = \dfrac{2+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

Or $\frac{1}{x}$ et $\frac{3}{x}$ tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$

Donc $2+\frac{3}{x}$ tend vers 2 et $1+\frac{1}{x}$ tend vers 1 donc $f(x)$ tend vers 2

Théorème

Encadrement

$$m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$$

Si $m(x)$ tend vers l et $M(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$ alors $f(x)$ tend vers l

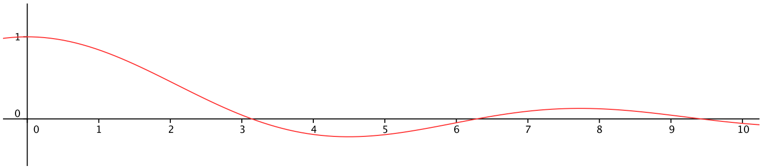
Exemple : Pour $x > 0$

$-1 \leqslant sin(x) \leqslant 1$

$\dfrac{-1}{x} \leqslant \dfrac{sin(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$

Or $\dfrac{-1}{x}$ et $\dfrac{1}{x}$ tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$

Donc $\dfrac{sin(x)}{x}$ tend aussi vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$



Courbe représentative de $x \rightarrow \dfrac{sin(x)}{x}$ et son asymptote l'axe des abscisses

Définition

On dit que f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si pour tout $B > 0$ il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $x > A$ on a $f(x) > B$
Deux notations peuvent être utilisées

- Si $x \to +\infty$ alors $f(x) \to +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

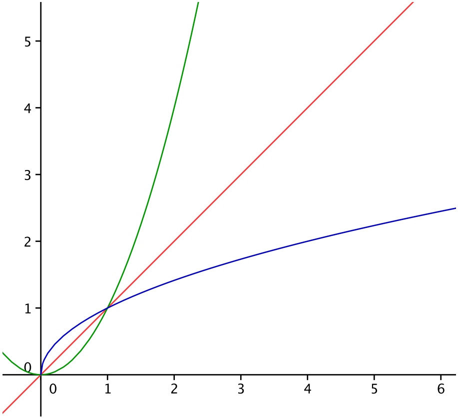
Théorème

- $x \to x$, $x \to x^2$ *et* $x \to x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ *ont pour limite* $+\infty$ *en* $+\infty$

Théorème

Lorsque x *tend vers* $+\infty$

- *si* $f(x) \to +\infty$ *alors* $\dfrac{1}{f(x)} \to 0^+$
- *si* $f(x) \to 0^+$ *alors* $\dfrac{1}{f(x)} \to +\infty$



Courbes de $x \rightarrow \sqrt{x}$, $x \rightarrow x$ et $x \rightarrow x^2$