Nombres Complexes

Vallon

1er novembre 2014

Définition

On admet l'existence d'un ensemble de nombres noté $\mathbb{C}$, appelé nombres complexes, de forme algébrique $a+ib$, où $a, b \in \mathbb{R}$ et tel que $i^2=-1$
Si $z=a+ib$

- on note $Re(z)$ la partie réelle de z , $Re(z)=a$
- on note $Im(z)$ la partie imaginaire de z, $Im(z)=b$

Exemples

1. $5=5+0\times i$ est un nombre complexe de partie réelle égale à 5 et de partie imaginaire nulle
2. $-2i$ est un nombre complexe de partie réelle nulle et de partie imaginaire égale à -2
3. $3-4i$

Théorème

- *On calcule* $(+, \times)$ *dans* $\mathbb{C}$ *comme dans* $\mathbb{R}$ *avec* $i^2 = -1$
- $2 + 3i - 5 + 4i = 2 - 5 + (3 + 4)i = -3 + 7i$
- $(2 + 3i) \times (-5 + 4i) = 2 \times -5 + 2 \times 4i + 3i \times -5 + 3i \times 4i = -10 + 8i - 15i + 12i^2 = -10 - 12 - 7i = -22 - 7i$

Et la division de deux nombres complexes ?

- Quelle est la forme algébrique de $\dfrac{1-i}{2+3i}$?
- Que valent a et b réels tel que $\dfrac{1-i}{2+3i} = a + bi$

Définition

Le conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$

$\overline{2+3i} = 2 - 3i$

Théorème

$$z\bar{z} = Re(z)^2 + Im(z)^2 \ donc \ \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{Re(z)^2 + Im(z)^2}$$

$$\frac{1-i}{2+3i} = \frac{1-i}{2+3i} \times \underbrace{\frac{2-3i}{2-3i}}_{=1} = \frac{(1-i)\times(2-3i)}{2^2+3^2} = \frac{-1-5i}{13} = -\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$$

Théorème

Dans la suite z désigne un nombre complexe et k un nombre réel

- $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{k \times z} = k\bar{z}$
- $\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$

Théorème

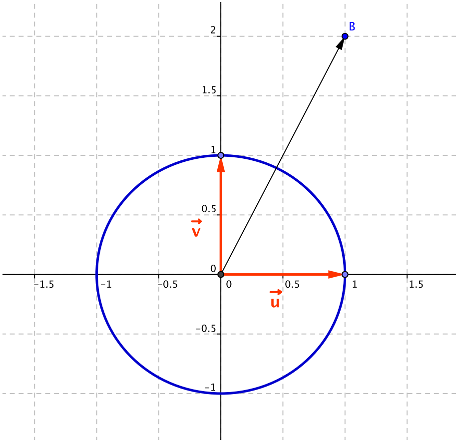
Si $r \in \mathbb{C}$ est une racine d'un polynôme à coefficients réels alors $\bar{r}$ aussi

Démonstration.

On note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec les a_k réels pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$
Par hypothèse $P(r) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k = 0$
Donc $P(\bar{r}) = \sum_{k=0}^{n} a_k (\bar{r})^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{r^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k r^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k r^k} = \overline{P(r)} = \bar{0} = 0$ □

Conséquences :

- Si un polynôme a un nombre pair de racines elles sont conjuguées deux à deux
- Si un polynôme a un nombre impair de racines, l'une d'entre elles est réelle



- L'image du nombre complexe $b = 1 + 2i$ est le point B de coordonnées $(1\,;\,2)$ relativement au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ou le vecteur $\vec{b}$ de même coordonnées
- L'affixe du point B de coordonnées $(1\,;\,2)$ relativement au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ est le nombre complexe $b = 1 + 2i$

Définition

Le module d'un nombre complexe z noté $|z|$ est défini par

$$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$$

C'est la longueur du vecteur image de z

- $|2 - 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$
- Pour tout $z \in \mathbb{C}^* \dfrac{z}{|z|}$ a pour module 1 (exercice)

Définition

- Tout point sur le cercle trigonométrique (cercle de centre l'origine du repère et de rayon 1) a pour coordonnées $(cos(\theta), sin(\theta))$ avec $\theta \in \mathbb{R}$
- Donc pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{z}{|z|} = cos(\theta) + isin(\theta)$
- Donc pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \underbrace{|z|(cos(\theta) + isin(\theta))}_{\text{formetrigonometrique}}$
- θ est un argument de z

Exemple :

- $z = \sqrt{3} - i$ a pour module $\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$.
- On cherche θ réel tel que $cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $sin(\theta) = -\dfrac{1}{2}$. On sait que $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$ à 2π près
- $z = 2(cos(\dfrac{-\pi}{6}) + isin(\dfrac{-\pi}{6}))$ est la forme trigonométrique de z