Exercices : Compléments sur la dérivation

EX 1

Est que la la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ et $f(0) = 0$ est dérivable en 0 ?

EX 2 (Approximation affine)

Dans un livre de Physique on trouve ces approximations affines. Justifiez les avec l'outil meilleure approximation affine

1. $\sqrt{1+h} \simeq 1 + \frac{h}{2}$ si h "petit"
2. $(1+h)^n \simeq 1 + nh$ si $h \ll 1$
3. $\sin(\theta) \simeq \theta$ si $\theta \ll 1$

EX 3

Utiliser les approximations affines pour faire du calcul approché de tête et comparer à la calculatrice

1. Combien vaut $\sqrt{0,995}$?
2. Combien vaut $1,005^3$?
3. Combien vaut $\sin(0,02)$?

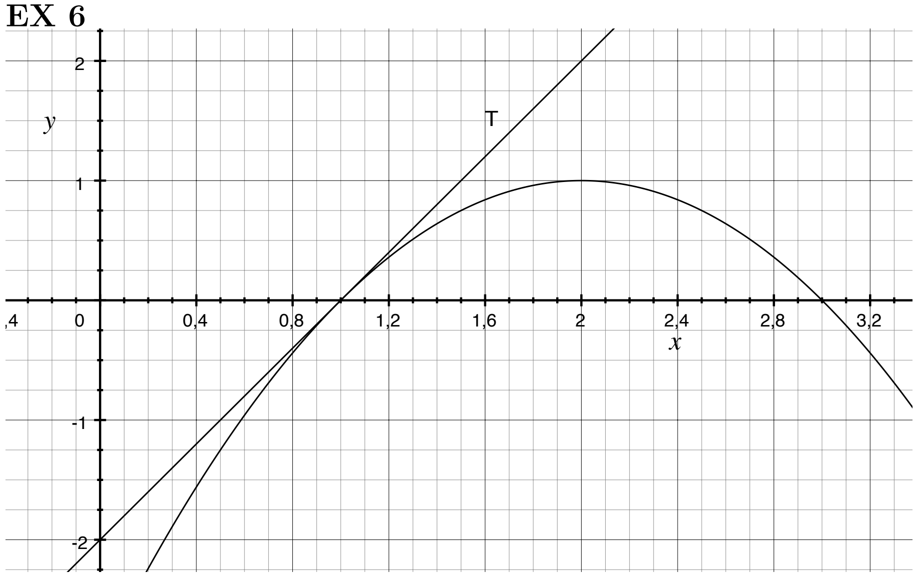
EX 4

1. Est ce que la fonction $x \to |x|$ est dérivable en 0 ?
2. Tracer avec l'aide de la calculatrice la courbe représentative de $x \to |x|\sin(x)$. Que pensez vous de la dérivabilité de cette fonction en 0 ?
3. Etudier par le calcul la dérivabilité de cette fonction en 0 ?
4. De quelle propriété (fausse) cette fonction est le contre-exemple ?

EX 5

Etudier la dérivabilité en 2 de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x + 2$ sur $[2; +\infty[$ et par $f(x) = x^2 - 6x + 10$ sur $]-\infty; 2[$

EX 6



La courbe ci-dessus représente une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-2)^2 + b$

T est la tangente à la courbe au point d'abscisse 1

1. Lire graphiquement $f(1)$, $f'(1)$, $f(2)$ et $f'(2)$.
2. En déduire b
3. Calculer la fonction dérivée de f en fonction de a et b. En déduire $f'(1)$ par le calcul
4. En déduire a

EX 7

Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

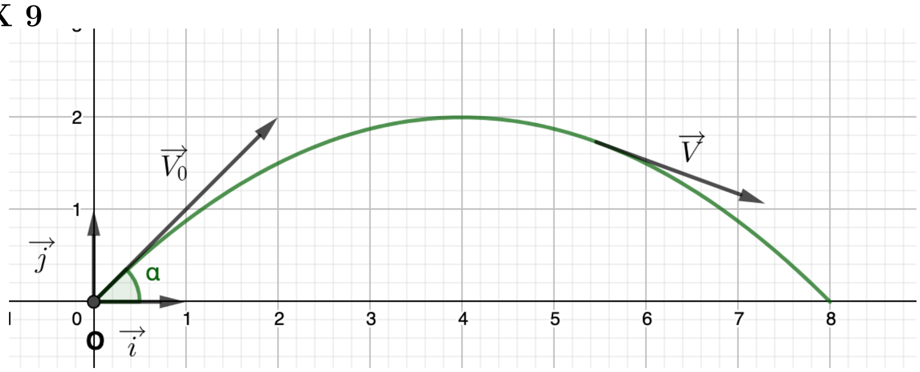
1. Calculer en fonction de a et b la fonction dérivée de f
2. Soit C et D deux points de la courbe représentative C_f d'abscisses respectives c et d. Calculer l'équation de la droite (CD)
3. Soit I le milieu de $[CD]$. Calculer l'équation de la tangente T_I à C_f au point d'abscisse x_I
4. En déduire que T_I et (CD) sont parallèles

EX 8

Déterminer la fonction dérivée de la fonction définie et dérivable sur I

1. $f(x) = (2x+1)\sqrt{x}$ avec $I =]0; +\infty[$
2. $f(x) = (2x+1)^5$ avec $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2+4x}$ avec $I =]0; +\infty[$
4. $f(t) = A\cos(\omega t)$ avec $I =]0; +\infty[$
5. $f(t) = A\cos(\omega t)\mathrm{e}^{-kt}$ avec $I =]0; +\infty[$

EX 9



On tire un coup de canon dans une région de l'hémisphère Nord et on néglige la déviation vers l'Est du boulet

On suppose donc que le boulet reste dans un plan repéré par le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

On suppose qu'à tout instant t les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont fonction du temps $t \in [0; +\infty[$ et définies par :

$x(t) = V_0\cos(\alpha)t$ et $y(t) = -\dfrac{gt^2}{2} + V_0\sin(\alpha)t$ (représentation paramètrique d'une parabole)

où V_0 est la norme du vecteur vitesse du boulet à l'instant initial (éjection du boulet) et α l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{V_0}$ et l'horizontale

Le but de l'exercice est de trouver la vitesse avec laquelle le boulet frappe le sol

1. Résoudre $y(t) = 0$ et en déduire l'instant t_1 où le boulet frappe le sol
2. Calculer les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ du boulet à tout instant
3. En déduire $\overrightarrow{V(t_1)}$

EX 9

Aux quatre coins d' une plaque carrée de côté L , on enlève 4 carrés de côtés x , ensuite on plie les bords obtenus afin d'avoir une boîte parallélépipèdique

1. Exprimer en fonction de L et de x le volume V de la boîte
2. On étudie V en fonction de x. Quel est le domaine de définition de V
3. Pour quelle valeur de x, V est maximal ?

EX 10

QCM : (Une seule réponse juste)

f est une fonction dérivable en un point d'abscisse a avec $f(a) \neq 0$ et $f'(a) \neq 0$. Le point d'intersection de la tangente à la courbe représentative de f et de l'axe des abscisses a pour abscisse :

a) $a - \dfrac{f'(a)}{f(a)}$ b) $a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$ c) $\dfrac{f(a)}{f'(a)} - a$ d) $a + \dfrac{f'(a)}{f(a)}$

EX 11

Vrai ou faux :

1. Si f est dérivable en a alors $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+3h) - f(a)}{h} = f'(a)$
2. Si f est dérivable en a alors $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)$
3. Si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ existe et vaut l alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$

EX 12

En admettant que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$ calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{\sin(3x)}$

EX 13

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin(\dfrac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est dérivable en 0

EX 14

On cherche une relation entre la vitesse d'éjection d'un bouchon de champagne v_0 et la hauteur maximale atteinte par ce bouchon h

On assimile le bouchon à un point B qui se déplace verticalement sur un axe $(O; \vec{i})$. Ce point est repéré sur cet axe par $\overrightarrow{OB} = x(t)\vec{i}$. A l'instant initial $(t = 0)$ on a $x'(0) = v_0$ et $x(0) = 0$. Pour simplifier on considère que le bouchon n'est soumis qu'à son poids $\overrightarrow{P} = m\vec{g}$, où $\vec{g}$ et $\vec{i}$ sont de sens opposés

1. Ecrire le principe fondamental de la dynamique dans le repère $(O; \vec{i})$ supposé galiléen et vérifier que $x"(t) = -g$
2. En déduire $x'(t)$ puis $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales
3. A quel instant $t = t_A$, $x'(t)$ change de signe ? A quoi cela correspond physiquement ?
4. Que vaut $x(t_A)$? En déduire que $v_0 = \sqrt{2gh}$

5. Application numérique : $v_0 = 16$ m/s on prendra $g = 9,81\ m/s^2$. Calculer h

EX 15

Reprendre l'exercice 9 et calculer le vecteur accélération que retrouve-t-on ?

EX 16

Relativement à un repère orthonormé un point suit un mouvement circulaire et uniforme

La loi horaire est donné par $x(t) = R\cos(\omega t)$ et $y(t) = R\sin(\omega t)$

1. Calculer le vecteur vitesse
2. Calculer le vecteur accélération