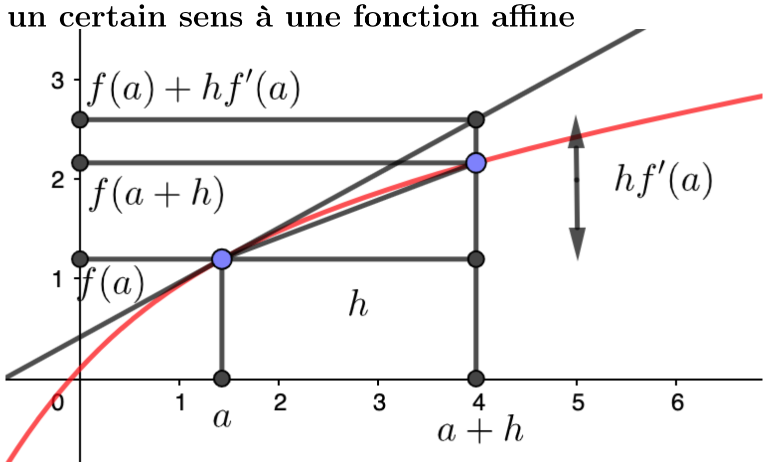
Compléments sur la dérivation

1 Meilleure approximation affine d'une fonction en un point

Nous avons vu dans le calcul de limites le lien entre le comportement d'une courbe et l'existence d'un type de limite (asymptotes)

On revient sur la dérivabilité d'une fonction en un point en développant l'idée que si la courbe admet une tangente en a alors la fonction "ressemble" en un certain sens à une fonction affine



Définition 1 *f dérivable en a si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe*

Définition 2 *f dérivable en a si $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe*

Exemples

1. $f(x)=x^2$ est dérivable en a quelconque en effet le coefficient directeur de la corde est $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{(a+h)^2-a^2}{h}=\dfrac{2ah+h^2}{h}=2a+h$
   Or $\lim\limits_{h\to 0}h=0$ donc par somme $\lim\limits_{h\to 0}2a+h=2a$
   Donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et vaut $2a$ ce qui signifie que f est dérivable en tout point d'abscisse a
2. $g(x)=\dfrac{1}{x}$ est dérivable en a
   $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\dfrac{-1}{a(a+h)}$
   Or $\lim\limits_{h\to 0}h=0$ donc par somme $\lim\limits_{h\to 0}a+h=a$ et par produit et par quotient $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{a(a+h)}=\dfrac{-1}{a^2}$

Théorème 1 *Si f dérivable en a alors il existe une fonction ϵ telle que*

$$f(a+h) = \underbrace{f(a)+hf'(a)}_{\text{fonction affine de } h} + \underbrace{h\epsilon(h)}_{\text{reste}} \text{ avec } \lim_{h\to 0}\epsilon(h) = 0$$

On dit que la fonction affine $h \to f(a)+hf'(a)$ est la meilleure approximation affine de f localement en a

Preuve

Puisque f est dérivable en a on peut dire que $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)+\epsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0}\epsilon(h) = 0$

Donc $f(a+h) = f(a)+hf'(a)+h\epsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0}\epsilon(h) = 0$

Théorème 2 *Si il existe un réel k et une fonction ϵ tel que pour tout h réel*

$f(a+h) = f(a)+hk+h\epsilon(h)$ *avec* $\lim_{h\to 0}\epsilon(h) = 0$

alors f est dérivable en a et $f'(a) = k$

Preuve (Exercice)

Définition 3 *Si f est dérivable en tout point a d'un intervalle ouvert I, alors on dit que f est dérivable sur I*

On associe à f une nouvelle fonction, la fonction dérivée f' de f définie sur I et qui associe à a le nombre dérivé en a noté $f'(a)$

Exemples

1. La fonction carré est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction $x \to 2x$
2. La fonction inverse est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa fonction dérivée est $x \to \dfrac{-1}{x^2}$

Théorème 3 *(Théorèmes algébriques)*

1. *(Somme) Si f et g sont dérivables sur I alors $f+g$ l'est aussi et $(f+g)' = f'+g'$*
2. *(Produit avec une constante) Si f est dérivable sur I alors kf l'est aussi pour tout k réel et $(kf)' = kf'$*
3. *(Produit) Si f et g sont dérivables sur I alors fg l'est aussi et $(fg)' = f'g+fg'$*
4. *(Inverse) Si f est dérivable sur I* ***et ne s'annule pas sur I*** *alors $\dfrac{1}{f}$ l'est aussi et $(\dfrac{1}{f})' = \dfrac{-f'}{f^2}$*
5. *(Quotient) Si f et g sont dérivables sur I* ***et g ne s'annule pas sur I*** *alors $\dfrac{f}{g}$ l'est aussi et $(\dfrac{f}{g}) = \dfrac{f'g-fg'}{g^2}$*

Preuve (Exercice avec l'outil meilleure approximation affine)

Théorème 4 *Si f dérivable en I et si $f' \geqslant 0$ (ou $\leqslant 0$) sur I alors f est croissante (ou décroissante) sur I*

Théorème 5 *Si f' s'annule et change de signe en a alors f admet un extremum en a*

Attention ! le fait de s'annuler ne suffit pas

Contre-exemple :

Si $f(x) = x^3$ alors $f'(x) = x^2$ s'annule en 0 mais f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et n'admet donc pas d'extremum en 0

2 Dérivée d'une fonction composée de deux fonctions dérivables

Les opérations algébriques ne suffisent pas pour construire les fonctions utiles en sciences physiques

Par exemple comment "analyser" les fonctions du type $t \to \sin(kt)$ utiles pour modéliser la propagation des ondes ?

Il existe un nouvel outil appelé la composition de fonctions

On construit d'abord la fonction $t \to kt$ notée ici u

Puis avec le résultat de la première $kt = x \to \sin(x)$, on applique la fonction sinus

On dit que la fonction f est la composée de sin et de u notée $\sin \circ u$

Théorème 6 *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et v une fonction dérivable sur $u(I)$ alors $v \circ u$ est dérivable sur I et*

$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$

Preuve

On va utiliser l'outil "meilleure approximation affine"

Soit $a \in I$, u dérivable en a signifie que

$u(a+h) = u(a) + u'(a)h + h\epsilon_1(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon_1(h) = 0$

v dérivable en $u(a)$ signifie que

$v(u(a)+k) = v(u(a)) + v'(u(a))k + k\epsilon_2(k)$ avec $\lim\limits_{k \to 0} \epsilon_2(k) = 0$

Montrons que vou est dérivable en a

$v(u(a+h)) = v(u(a) + \underbrace{u'(a)h + h\epsilon_1(h)}_{k}) = v(u(a)) + v'(u(a))(u'(a)h + h\epsilon_1(h)) + u'(a)h + h\epsilon_1(h)\epsilon_2(u'(a)h + h\epsilon_1(h)) = v(u(a)) + v'(u(a))(u'(a)h + h(\underbrace{v'(u(a)\epsilon_1(h) + ...}_{\epsilon_3(h))}$

D'après le théorème 2 vou est dérivable en a et .....

Exemples

1. $t \to \cos(kt)$ est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables et sa fonction dérivée est
   $t \to -\sin(kt) \times k$
2. $t \to \mathrm{e}^{kt}$ est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables et sa fonction dérivée est
   $t \to \mathrm{e}^{kt} \times k$

3 Dérivée seconde

Définition 4 *Si f est dérivable sur un intervalle ouvert I et si f' est dérivable sur I alors on dit que f est deux fois dérivable sur I et la fonction dérivée $(f')'$ de f' se note f'' et s'appelle la dérivée seconde de f*

Autres notations : $f''(x) = \dfrac{d^2}{dx^2}f(x) = \dfrac{d^2 f}{dx^2}(x)$

Applications :

1. En mécanique la dérivée seconde a une interprétation, **l'accélération**
2. En Géométrie, elle est liée à la **courbure d'une courbe** (voir Exercices)

Exemples

1. $(\cos)'' = -\cos$
2. $(\sin)'' = -\sin$

4 Fonction convexe sur un intervalle

Définition 5 *f est dite convexe sur un intervalle I si pour tout a et b dans I, l'arc de courbe reliant les points d'abscisses a et b est* ***en dessous*** *de la corde reliant ces mêmes points*

Autrement dit
Pour tout $a \in I$ et $b \in I$ et $x \in I$
Si $a < x < b$ alors $f(x) \leqslant f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

Exemples

1. La fonction carré est convexe sur $[0; +\infty[$ (pas sur $]-\infty, 0]$)
2. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$

Définition 6 *f est dite concave sur un intervalle I si pour tout a et b dans I, l'arc de courbe reliant les points d'abscisses a et b est* ***au dessus*** *de la corde reliant ces mêmes points*

Autrement dit
Pour tout $a \in I$ et $b \in I$ et $x \in I$
Si $a < x < b$ alors $f(x) \geqslant f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

Théorème 7 *Si f est concave sur I alors $-f$ est convexe sur I*

Théorème 8 *Si f est deux fois dérivable sur I*
f convexe sur $I \iff f'' \geqslant 0$

Théorème 9 *Si f est deux fois dérivable sur I*
f convexe sur $I \iff$ Pour tout $a \in I$ et tout $x \in I$ on a $f(x) \geqslant f(a) + (x - a)f'(a)$
C'est à dire que la courbe est au-dessus de toutes ses tangentes

5 Point d'inflexion