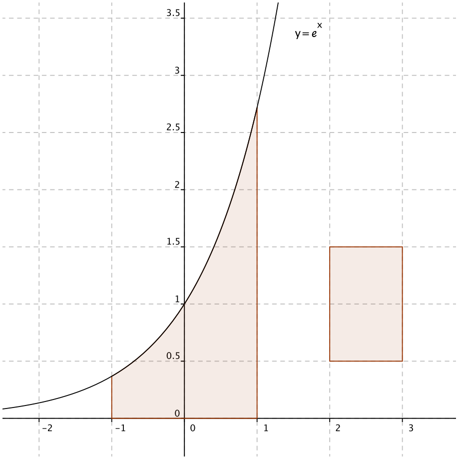
# Calcul intégral

Vallon

25 janvier 2015




Problème : Etant donné une unité d'aire (rectangle marron) que vaut l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses entre $x = -1$ et $x = 1$

- De manière expérimentale on trouve que sous la courbe il y a entre 4 et 5 petits rectangles
- Autrement dit l'aire sous la courbe vaut entre 2 et 2,5 unités d'aire (u a)
- Mais dans quel sens peut on être sûr que cette aire existe ?

### Théorème

*Pour une fonction positive et continue sur un intervalle* $[a, b]$ *la surface comprise entre les droites d'équation* $x = a$ *et* $x = b$*, l'axe des abscisses et la courbe d'équation* $y = f(x)$ *a une aire notée* $\int_a^b f(x)dx$ *(qui se lit intégrale entre a et b de* $f(x)$*)*

Théorème

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ *(Relation de Chasles)*

### Théorème

*Soit $f$ une fonction continue , positive et croissante sur un intervalle $[a; b]$ alors la fonction $F$ définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et $F'(x) = f(x)$. On dit que $F$ est une primitive de $f$ sur $[a; b]$*

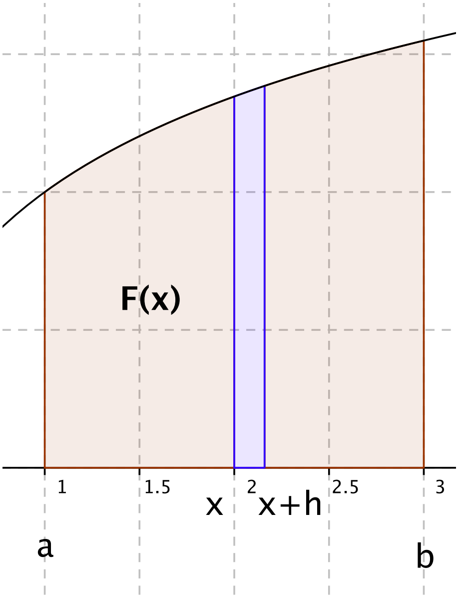
### Démonstration.

Pour $h > 0$ la surface en bleue ci-dessous a pour aire $F(x+h) - F(x)$ que l'on encadre ainsi : $hf(x) \leqslant F(x+h) - F(x) \leqslant hf(x+h)$

Et $f(x) \leqslant \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \leqslant f(x+h)$

Si $x \to 0^+$ alors puisque $f$ est continue en $x$ on a $f(x+h) \to f(x)$ donc $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \to f(x)$ Pour $h < 0$ on obtient le même résultat

Donc $F$ est dérivable en $x$ et $F'(x) = f(x)$ $\square$


F(x)
1
1.5
2
2.5
3
x
x+h
a
b

### Théorème

*Si la dérivée d'une fonction $f$ s'annule sur un intervalle alors la fonction $f$ est constante sur cet intervalle*

### Théorème

*Si une fonction $f$ a deux primitives $F_1$ et $F_2$ sur [a ;b] alors pour tout $x \in [a; b]$ on a $F_1(x) - F_2(x) = C$ où $C$ est une constante*

### Démonstration.

$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$ donc il existe une constante $C$ telle que pour tout $x \in [a; b]$ on a $(F_1 - F_2)(x) = C$ $\square$

### Théorème

*Soit $f$ une fonction continue, positive et croissante , l'ensemble des fonctions $x \to F(x) + C$ où $C \in \mathbb{R}$ est l'ensemble des primitives de $f$*

### Démonstration.

L'ensemble des primitives de $f$ est non vide car $F$ appartient à cet ensemble , soit $G$ une primitive quelconque de $f$ alors $G$ diffère de $F$ d'une constante □

### Théorème

*Soit $f$ une fonction continue, positive et croissante ,*
*$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$ où $G$ est une primitive connue de $f$ sur $[a; b]$*

### Démonstration.

Si $f$ est une fonction relativement simple , on connaît une primitive $G$ de $f$ Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = G(x) + C$.Or $\int_a^b f(x)dx = F(b)$ Donc $F(b) = G(b) + C$ et $F(a) = G(a) + C$ donc $C = -G(a)$ et $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$ □

- $\int_0^1 x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}$
- $\int_{-1}^1 e^x dx = [e^x]_{-1}^1 = e - \frac{1}{e}$

## Définition

$f$ est une fonction continue (pas forcément positive) sur $[a; b]$
$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$ où $G$ est une primitive de $f$ sur [a ;b]

## Théorème

*$f$ et $g$ des fonctions continues sur [a ;b], $k$ un réel*

- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$
- *Si $f \geqslant 0$ sur [a ;b] alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$*