Continuité : Théorème des valeurs intermédiaires

EX N°1

1. Résoudre l'équation $E(x) = 0,5$ dans $\mathbb{R}$
2. Pour tout k réel discuter des solutions de $E(x) = k$ suivant les valeurs de k

EX N°2

1. Dessiner un exemple de courbe représentative C_f d'une fonction f continue sur [0 ;1] à valeurs dans [0 ;1]. Est ce que C_f et le segment d'équation $y = x$ sur [0 ;1] sont toujours sécants ?
2. Etant donnée une fonction continue f sur [0 ;1] à valeurs dans [0 ;1], on définie une fonction g sur [0 ;1] par

$$g(x) = f(x) - x$$

3. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires montrer que l'équation $g(x) = 0$ a au moins une solution dans [0 ;1]. Conclure
4. Soit $u_n = f(u_{n-1})$ avec f continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que (u_n) est convergente vers l, en déduire que l est solution de $g(x) = 0$

EX N°3

Démontrer que l'équation admet au moins une solution dans l'intervalle proposé

1. $x^3 + 4x^2 + 4x = -1$ avec $I = [0; 2]$
2. $3x^4 - 8x^3 + 6x^2 = 3$ avec $I = [0; 1]$
3. $e^x = x + 2$ avec $I = [-5; 5]$

EX N°4

1. En utilisant votre calculatrice conjecturer sur l'existence de solutions pour l'équation $x^2 - 8x + 5 = \dfrac{1}{x}$
2. Justifier la conjecture

EX N°5

1. Montrer que l'équation ch(x) = 2 a 2 solutions dans $\mathbb{R}$
2. Montrer que l'équation sh(x) = 2 a une unique solution dans $\mathbb{R}$

EX N°6

Soit $f(x) = x^3 - 12x$ définie sur $I = [-3; 3]$

1. Montrer que pour tout $k \in [-9; 9]$ l'équation $f(x) = k$ a au moins une solution dans I
2. Par lecture graphique discuter du nombre de solutions de $f(x) = k$ suivant les valeurs de k

EX N°7

Pour tout n entier supérieur ou égal à 1 on définit f_n sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x - 1$$

1. Justifier que l'équation $f_n(x) = 0$ a au moins une solution dans [0 ;1]
2. Justifier que la fonction f_n est croissante sur $[0; 1]$
3. En déduire que $f_n(x) = 0$ a une solution unique sur [0 ;1]. On note u_n cette solution
4. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée par 0
5. En déduire que (u_n) converge vers l. Que vaut l ?

EX N°8

La méthode des tangentes pour la résolution de $f(x) = 0$ est mise en oeuvre par la suite $u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ avec $u_0 = a$

1. On cherche la solution positive de $f(x) = 0$ avec $f(x) = x^2 - 2$. Adapter la suite (u_n) ci-dessus avec la fonction f. Reconnaissez vous cette suite ?
2. Faire un programme pour la méthode des tangentes et calculer à chaque tour de boucle le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n^2}$. Qu'observez vous ?
3. Comment évolue le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ pour la méthode de dichotomie où $u_n = a$ la borne inférieure de l'intervalle ?

EX N°9

Un cylindre a pour base un disque de rayon 1dm et contient de l'eau sur une hauteur de 0,5 dm. On plonge dans ce cylindre une bille de diamètre d (en dm). Quel est le diamètre d de la bille pour lequel le niveau de l'eau est tangent à la bille ?

1. Démontrer que $0 < d < 2$ et $d^3 - 6d + 3 = 0$
2. Démontrer que l'équation $d^3 - 6d + 3 = 0$ admet une solution unique dans]0 ;2[
3. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution

EX N°10

Soit f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = xe^x - 1$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.
2. Justifier que $f(x) = 0$ a au moins une solution sur $[0;+\infty[$
3. Justifier que cette solution est unique (notée α)
4. Déterminer le signe de f sur $[0;+\infty[$
5. Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = (x-1)(e^x - 1)$
   Etudier le sens de variations de g
6. Montrer que $g(\alpha) = -\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$

EX N°11*

Pour tout nombre entier $n \geqslant 1$ on note P_n le polynôme défini par $P_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$

Démontrer que P_n a une racine entre $\dfrac{2n}{n+1}$ et 2