Caractéristiques d'une variable aléatoire discrète

Vallon

1er mars 2015

- l'expérience aléatoire est le lancer d'un dé 4 fois
- Chaque résultat possible peut être décrit par un quadruplet (d_1, d_2, d_3, d_4) où chaque $d_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- L'univers Ω est l'ensemble des quadruplets
- Un évènement A est une partie de l'univers, par exemple tous les quadruplets ne contenant aucun 6
- Calculer la probabilité de A c'est associer à A un nombre $P(A)$ compris entre 0 et 1 qui mesure son degré de réalisation
- Souvent on suppose que tous les évènements élémentaires, ici les quadruplets, ont la même chance de se réaliser et par conséquent

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

- l'expérience aléatoire est le lancer d'un dé 4 fois
- Une variable aléatoire est une fonction numérique réelle définie sur Ω
- Par exemple X_1 définie par $X_1((d_1, d_2, d_3, d_4)) = \sum_{i=1}^{4} d_i$
- Par exemple X_2 définie par $X_2((d_1, d_2, d_3, d_4)) =$ nombre de fois où 6 apparaît dans (d_1, d_2, d_3, d_4)

- La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X est la donnée de toutes les valeurs de X ainsi que les probabilités associées à ces valeurs
- De manière générale $P(X = k) = P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = k\})$
- Par exemple X_2 a pour loi de probabilité (loi binomiale) de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{6}$

X_2	0	1	2	3	4
$P(X_2 = k)$	0,4823	0,3858	0,1157	0,0154	0,0008

- X_3 prend les valeurs $2n + 1$ où $n \geqslant 1$ et les probabilités sont données par une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{4}$ et de raison $\frac{3}{4}$

Définition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est définie par $F(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{k \leqslant x} P(X = k)$
(probabilités cumulées croissantes)

Exemple :

X_2	0	1	2	3	4
$P(X_2 = k)$	0,4823	0,3858	0,1157	0,0154	0,0008
$F(x)$	0,4823	0,8681	0,9838	0,9992	1

Définition

L'espérance d'une variable aléatoire discrète X est définie par :
$E(X) = \sum_k kP(X = k) = \sum_k kP(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = k\}) = \sum_k k(\sum_{\omega, X(\omega)=k} P(\omega))$
Finalement $E(X)$ peut aussi s'écrire $E(X) = \sum_\omega X(\omega)P(\omega)$
(la somme est faite sur les évènements élémentaires)

Exemples :

- Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors $E(X) = np$, donc $E(X_2) = 4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$
- X_3 est une variable aléatoire discrète mais infinie et $E(X_3)$ existe en tant que limite d'une suite et vaut 9

Théorème

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(kX) = kE(X)$
- $E(k) = k$
- *Si* $X \leqslant Y$ *alors* $E(X) \leqslant E(Y)$
- $\boxed{E(X - E(X)) = 0}$

Démonstration.

- $E(X+Y) = \sum_{\omega} (X+Y)(\omega) P(\omega) = \sum_{\omega} (X(\omega) + Y(\omega)) P(\omega) = \sum_{\omega} X(\omega) P(\omega) + \sum_{\omega} Y(\omega) P(\omega) = E(X) + E(Y)$
- Le point important est de calculer l'espérance sur les évènements élémentaires et la définition d'une somme de deux fonctions et du produit d'une fonction par une constante
- On dit que l'espérance est linéaire
- $E(X - E(X)) = E(X) - E(E(X)) = E(X) - E(X) = 0$

Définition

La variance d'une variable aléatoire discrète X, notée $V(X)$ est définie par :
$V(X) = E((X - E(X))^2) > 0$

Théorème

- $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Démonstration.

On utilise les propriétés de l'espérance
$E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2) = E(X^2) - E(2XE(X)) + E(E(X))^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X)) + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$ □

Exemple : Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors
$V(X) = np(1 - p)$

$$\begin{aligned} X &\to m \\ E(X) &\to m \\ V(X) &\to m^2 \\ \sigma(X) &\to m \end{aligned}$$

Définition

L' écart type d'une variable aléatoire discrète X, notée $\sigma(X)$ est définie par :
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple : Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors
$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

2, 75% des valeurs de X

E(X)

E(X)-2σ E(X)+2σ

Théorème

- *Pour tout* $a > 0$ *on a* $P(|X| \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(X^2)}{a^2}$
- *Pour tout* $a > 0$ *on a* $\boxed{P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \dfrac{V(X)}{a^2}}$

Démonstration.

On introduit la fonction "seuil" $1_{[a;+\infty[}(|X|) = 1$ *si* $|X| \geqslant a$ *0 sinon*
on peut donc écrire :
$|X| \geqslant a1_{[a;+\infty[}(|X|)$ *donc* $|X|^2 \geqslant a^2 1_{[a;+\infty[}(|X|)$
donc $E(|X|^2) \geqslant a^2 E(1_{[a;+\infty[}(|X|)) = a^2 P(|X| \geqslant a)$
Pour la deuxième inégalité on remplace X *par* $X - E(X)$ □

Application :Prenons $a = 2\sigma(X)$ donc $a^2 = 4V(X)$ et

$P(|X - E(X)| \geqslant 2\sigma(X)) \leqslant \dfrac{1}{4}$ = 0,25

Autrement dit moins de 25 % des valeurs d'une variable aléatoire sont au delà de 2 fois l'écart type autour de $E(X)$