Exercices : Les sous-ensembles $a\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$

Ex n°1

A l'aide de l'algorithme d'Euclide déterminer le pgcd des entiers a et b

1. $a = 441$ et $b = 777$
2. $a = 2004$ et $b = 9185$
3. $a = 147$ et $b = 741$

Ex n° 2

Montrer que 7102 et 2017 sont premiers entre eux

Ex n° 3

1. Donner l'ensemble des diviseurs de 360. Combien sont ils ?
2. Décomposer 360 en facteurs premiers $360 = \prod p_i^{\alpha_i}$ et conjecturer une formule pour dénombrer les diviseurs à partir de α_i

Ex n° 4

Un nombre est dit parfait si il est égal à la somme de ses diviseurs excepté lui-même, par exemple 6 car

$6 = 1 + 2 + 3$

1. Montrer que 28 est parfait
2. Montrer que si $2^n - 1$ est premier alors $2^{n-1}(2^n - 1)$ est parfait

Ex n°5

Pour chaque couple d'entiers a et b suivant déterminer leur pgcd d puis plusieurs entiers u et v tel que $au + bv = d$

1. $a = 30$ et $b = 45$
2. $a = 20$ et $b = 63$
3. $a = 252$ et $b = -524$

Ex n° 6

a un entier $\geqslant 2$, m et n deux entiers $\geqslant 1$,

1. Montrer que $\text{pgcd}(a^m - 1\ ,\ a^n - 1) = a^{\text{pgcd}(m,n)} - 1$
2. En déduire que si m et n sont premiers entre eux alors $2^m - 1$ et $2^n - 1$ aussi

Ex n° 7 *Vrai ou Faux ?*

La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n}\text{pgcd}(20\,;n)$ pour $n \geqslant 1$ est convergente

Ex n°8

a un entier $\geqslant 2$, m et n deux entiers $\geqslant 1$ montrer que si m et n sont premiers entre eux alors $1+a+a^2+\ldots+a^{m-1}$ et $1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}$ sont premiers entre eux. Réciproque ?

Ex n°9

Vrai ou faux ? le pgcd de deux entiers a et b est une combinaison linéaire **unique** de a et de b

Ex n° 10

Prouver que pgcd$(a,b)\times$ ppcm$(a,b) = ab$

Ex n°11

On appelle nombres de Fermat les nombres $F_n = 2^{2^n} + 1$ avec $n \geqslant 0$

1. Montrer que $F_n | 2^{F_n} - 2$
2. Montrer que si $m \neq n$ alors F_m et F_n sont premiers entre eux
3. En déduire que l'ensemble des nombres premiers est infini

Ex n°12

Sur un vélodrome deux cyclistes partent en même temps de la ligne du départ et roulent à vitesse constante. Le coureur 1 fait un tour de circuit en 30 secondes et le coureur 2 en 42 secondes. Au bout de combien de temps le coureur 1 aura-t-il exactement un tour d'avance ?

Ex n°13 (BAC)

On considère l'équation $(E)\ :\ 25x - 108y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs

1. Vérifier que le couple (13 ;3) est solution particulière de cette équation
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E)

Prolongement :

BAC 2001 : Amérique du Nord, Centres étrangers, Pondichéry, Nouvelle Calédonie(2000)

Ex n°14

Montrer que l'équation $7x^3 + 2 = y^3$ n'admet aucune solution pour x et y dans $\mathbb{Z}$

Ex n°15

Résoudre $3x \equiv 5[7]$ (Multiplier par 5 de part et d'autre et remarquer que $15 \equiv 1\ [7]$)

Ex n°16

a et b deux entiers

On pose $d =$pgcd(a,n)

1. $ax \equiv b[n]$ a des solutions si et seulement si $d|b$
2. $ax \equiv 0[n]$ si et seulement si $x \equiv 0[\frac{n}{d}]$
3. $ax \equiv ax'[n]$ si et seulement si $x \equiv x'[\frac{n}{d}]$

Ex n°16

Déterminer les entiers a et b tels que :

$$21a = 55b$$

Ex n°17

On veut résoudre le système $x \equiv 3\ [11]$ et $x \equiv 4\ [15]$ avec x un entier relatif

1. Montrer que résoudre le système précédent revient à résoudre l'équation $11a + 15b = 1$ avec a et b dans $\mathbb{Z}$
2. Résoudre le problème

Ex n°18

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et n un entier naturel plus grand que 2. On définit l'ordre de a modulo n comme étant le plus petit entier naturel k tel que $a^k \equiv 1\ [n]$

Montrer que k divise le nombre d'éléments de $\{2, 3, ..., n-1\}$ premiers avec n

Ex n°19(Théorème de Fermat)

1. p premier démontrer que $p|\binom{p}{k}$ pour tout k
2. En admettant la formule de Newton $(a+b)^p = \sum\limits_{k=0}^{k=p} \binom{p}{k} a^{p-k} b^k$, montrer que $(a+b)^p \equiv a^p + b^p[p]$
3. Montrer par récurrence sur k que $(a_1 + a_2 + ... + a_k)^p \equiv a_1^p + a_2^p + ... + a_k^p[p]$
4. En déduire $\forall 1 \leqslant a \leqslant p-1\ a^{p-1} \equiv 1[p]$
5. En déduire le petit théorème de Fermat $\forall a \in \mathbb{N}^*$ non multiple de p $a^{p-1} \equiv 1[p]$

Ex n° 20

Soit la décomposition en facteurs premiers de n, $n = p_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha_k}$

Le nombre de manières de séparer n en deux facteurs premiers entre eux est $2^k - 1$

Ex n°21

Résoudre $x^2 + x + 1 \equiv 0[13]$

Ex n°22

Si $n \geqslant 5$ il existe toujours un carré parfait entre n et $2n$ strictement

Ex n°23

Résoudre $x^3 - 1 \equiv 0[19]$

Ex n°24

La suite de Fibonnacci est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$

1. Prouver que $\text{pgcd}(F_m, F_n) = F_{\text{pgcd}(m,n)}$
2. Montrer que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux pour tout $n \geqslant 1$

Ex n°25

On appelle nombres de Mersenne les nombres $M_n = 2^n - 1$ avec $n \geqslant 2$

Prouver que $\text{pgcd}(M_k, M_l) = M_{\text{pgcd}(k,l)}$

Ex n°26

Exercices Avril 2015 Pondichéry et Novembre 2016 Amérique du Sud

Equations diophantiennes

Amérique du Nord 2001

1. Pour tout n entier relatif on a $-14 \times (5n+1) + 5(14n+3) = 1$ donc d'après le Théorème de Bézout, pour tout n entier relatif $5n+1$ et $14n+3$ sont premiers entre eux
2. Pour $n = 6$ on a d'après 1) 87 et 31 sont premiers entre eux et $-14 \times 31 + 5 \times 87 = 1$ par conséquent une solution particulière de (E) est $(x_0; y_0) = (10; -28)$
3. Soit $S = \{(x; y)\ 87x + 31y = 2\}$ les solutions de (E). S est non vide car $(x_0; y_0) \in S$
   Pour tout élément $(x; y)$ de S on a $87x + 31y = 87x_0 + 31y_0$ autrement dit $87(x - x_0) = 31(y_0 - y)$
   Or 87 divise $87(x - x_0)$ donc $31(y_0 - y)$ et est premier avec 31 donc d'après le Théorème de Gauss 87 divise $y_0 - y$ donc **il existe** k entier relatif tel que $y_0 - y = 87k$
   De même **il existe** l relatif tel que $x - x_0 = 31l$ donc $87 \times 31l = 31 \times 87k$ donc $k = l$
   Maintenant considérons l'ensemble $E = \{(x; y) = (10 + 31k; -28 - 87k)\ \underline{k \in \mathbb{Z}}\}$
   Nous avons montré précédemment que $S \subset E$
   Réciproquement **pour tout** $k \in \mathbb{Z}$ on a $(10 + 31k; -28 - 87k)$ est solution de (E) car $87 \times (10 + 31k) + 31(-28 - 87k) = 2$ donc $E \subset S$ donc $E = S$
4. La droite D a pour équation cartésienne $87x - 31y = 2$ autrement dit
   $M(x; y) \in D$ où x et y sont entiers avec $0 \leqslant x \leqslant 100$
   $\iff 87x - 31y = 2 \iff (x; -y) \in S \iff 0 \leqslant x = 10 + 31k \leqslant 100\ y = 28 + 87k$
   On trouve $k \in \{0, 1, 2\}$ et les points sont $\{(10; 28)\ ,\ (41; 115),\ ,\ (72; 202)\}$

Pondichéry 2001

1. 11 est un nombre premier et 24 n'est pas un multiple de 11 donc 24 et 11 sont premiers entre eux donc d'après le Théorème de Bezout il existe u, v entiers relatifs tel que $11u + 24v = 1$ donc il existe (n, m) entiers relatifs tel que $11n - 24m = 1$. On va trouver une solution par l'algorithme d'Euclide
2. $24 = 11 \times 2 + 2$
   $11 = 2 \times 5 + 1$
   $2 = 1 \times 2$
   Donc $1 = 11 - 2 \times 5$ or $2 = 24 - 11 \times 2$ donc $1 = 11 - (24 - 11 \times 2) \times 5$
   Donc $1 = 24 \times (-5) + 11 \times 11$ donc $n = 11$ et $m = 5$
3. Soit $S = \{(x; y) \in \mathbb{Z}^2\ 11x - 24y = 1\}$ les solutions de l'équation (1)
   S est non vide car $(x_0 = 11; y_0 = -5) \in S$
   Pour tout élément $(x; y)$ de S on a $11x - 24y = 11x_0 - 24y_0$ autrement dit $11(x - x_0) = 24(y - y_0)$

Or 11 divise $11(x - x_0)$ donc $24(y_0 - y)$ et est premier avec 24 donc d'après le Théorème de Gauss 11 divise $y - y_0$ donc **il existe** k entier relatif tel que $y - y_0 = 11k$

De même **il existe** l relatif tel que $x - x_0 = 24l$ donc $11 \times 24l = 24 \times 11k$ donc $k = l$

Maintenant considérons l'ensemble $E = \{(x; y) = (11 + 24k; -5 + 11k)\ \underline{k \in \mathbb{Z}}\}$

Nous avons montré précédemment que $S \subset E$

Réciproquement **pour tout** $k \in \mathbb{Z}$ on a $(11+24k; -5+11k)$ est solution de (E) car $11 \times (11 + 24k) + 24(-5 - 11k) = 1$ donc $E \subset S$ donc $E = S$

4. $10 \equiv 1\ [9]$ donc $10^{11} \equiv 1^{11} \equiv 1\ [9]$ donc $10^{11} - 1 \equiv 0\ [9]$ ce qui signifie que 9 divise $10^{11} - 1$

   On montre de même que 9 divise $10^{24} - 1$
5. $10^{11n} - 1 - 10(10^{24m} - 1) = 10^{11n} - 10^{24m+1} + 9 = 9$ car $11n = 24m + 1$ par hypothèse
6. On remplace a par $10^{11}-1$ dans l'égalité fournie et on a montré ainsi que $10^{11}-1$ divise $10^{11n}-1$ pour tout n entier naturel non nul, donc il existe N entier relatif tel que $10^{11n} - 1 = N(10^{11} - 1)$

   De même on montre que $10^{24} - 1$ divise $10^{24m} - 1$ donc il existe M' relatif tel que $10^{24m} - 1 = M'(10^{24} - 1)$ et finalement $10^{11n} - 1 - 10(10^{24m} - 1) = 9$ devient $N(10^{11} - 1) - 10M'(10^{24} - 1) = 9$

   Posons $M = 10M'$ donc il existe N et M relatifs tel que

   $(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$
7. Tout diviseur commun à $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$ divise toute **combinaison linéaire** de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$ autrement dit divise 9 qui s'exprime comme une combinaison linéaire de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$ d'après la question précédente
8. Or $\text{pgcd}(10^{11} - 1, 10^{24} - 1)$ est aussi un diviseur commun de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$ donc $\text{pgcd}(10^{11} - 1, 10^{24} - 1)$ divise 9. Mais on a montré précédemment que 9 est un diviseur commun de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$

   par conséquent 9 divise $\text{pgcd}(10^{11} - 1, 10^{24} - 1)$ donc $\text{pgcd}(10^{11} - 1, 10^{24} - 1) = 9$

Nouvelle Calédonie mars 2001

1. 363 et 484 sont divisibles par 11 après division on trouve que $363 = 11^2 \times 3$ et $484 = 11^2 \times 4$ donc pgcd(363 ;484) = 121
2. 484 - 363 = 121 donc (363 ;484) $\in S$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $-1 \times n + 1 \times (n+1) = 1$ par conséquent d'après le theorème de Bezout n et $n + 1$ sont premiers entre eux donc leur pgcd vaut $1 = n + 1 - n$

   Donc le couple $(n; n + 1) \in S$
4. Si $(x; y) \in S$ alors $\text{pgcd}(x; y) = y - x$ divise x donc il existe k entier naturel non nul tel que $x = k(y - x)$

   Enfin $y = x + (y - x) = k(y - x) + (y - x) = (k + 1)(y - x)$

   Réciproquement s'il existe k entier naturel non nul tel que $x = k(y - x)$ et $y = (k + 1)(y - x)$ alors puisque $y > x$ et k et $k + 1$ premiers entre eux le pgcd de x et y est $y - x$ donc $(x; y) \in S$

5. Puisque ppcm$(x;y)\times$ pgcd$(x;y) = xy$ donc ppcm$(x;y)\times(y-x) = k(k+1)(y-x)^2$ donc ppcm$(x;y) = k(k+1)(y-x)$
6. $228 = 2^2 \times 3 \times 19$
7. $228 = 1 \times 2 \times 114$ donc $k = 1$ et $y - x = 114$ donc $x = 114$ et $y = 228$
8. $228 = 2 \times 3 \times 38$ donc $k = 2$ et $y - x = 38$ donc $x = 76$ et $y = 114$
   $228 = 3 \times 4 \times 19$ donc $k = 3$ et $y - x = 19$ donc $x = 57$ et $y = 76$
   Donc trois solutions les couples (114 ;228) , (76 ;114) et (57 ;76)

Ex n°17

1. x est solution du système $x \equiv 3[11]$ et $x \equiv 4\ [15]$ si et seulement si il existe k et l entiers relatifs tel que $3 + 11k = 4 + 15l$ ce qui équivaut à il existe a et b relatifs tel que $11a + 15b = 1$
2. On cherche une solution particulière on a en tâtonnant $11 \times (-4) + 15 \times 3 = 1$
   Soit $S = \{(x;y)|11x + 15y = 1\}$ On pose $x_0 = -4$ et $y_0 = 3$
   Pour tout $(x;y) \in S$ on a $11x + 15y = 11x_0 + 15y_0$ donc $11(x - x_0) = 15(y_0 - y)$
   11 divise $11(x - x_0)$ donc $15(y_0 - y)$, or 11 et 15 sont premiers entre eux d'après le théorème de Gauss, 11 divise $y_0 - y$ donc il existe k relatif tel que $y_0 - y = 11k$
   De même il existe l relatif tel que $x - x_0 = 15l$ donc $11(15l) = 15(11k)$ donc $k = l$
   Soit $E = \{(x;y)|x = x_0 + 15k\ ,\ y = y_0 - 11k\ k \in \mathbb{Z}\}$
   On a déjà montré que $S \subset E$, vérifions que $E \subset S$ en effet pour tout $k \in \mathbb{Z}$ les couples $(x_0 + 15k; y_0 - 11k)$ sont solutions de $11x + 15y = 1$ en effet
   $11(x_0 + 15k) + 15(y_0 - 11k) = 11x_0 + 15y_0 = 1$ donc $S = E$
   maintenant pour tout $k \in \mathbb{Z}$
   $11(x_0+15k)+15(y_0-11k) = 1 = 4-3 \iff 3+11(x_0+15k) = 4+15(-y_0+11k)$
   Donc les solutions du système sont les entiers $3 + 11(x_0 + 15k) = -41 + 165k$ avec $k \in \mathbb{Z}$