Exercice 1

Calculer les valeurs propres (si elles existent) des matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
et $F = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Chercher des vecteurs propres des matrices ci-dessus lorsque c'est possible

Exercice 3 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

1. Calculer AB
2. En déduire si A inversible la matrice A^{-1}

Exercice 4

Donner un exemple de matrice **bistochastique** (c'est à dire stochastique suivant les lignes et les colonnes) d'ordre 2 puis d'ordre 3

Exercice 5

Montrer que si X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ de la matrice A alors pour tout k réel **non nul** le vecteur kX est aussi un vecteur propre de A

Exercice 6

Etant donné un polynôme quelconque à coefficients réels $P(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$. Si $(\lambda,\ X)$ est un couple valeur-vecteur propre d'une matrice A, prouver que $(P(\lambda),\ X)$ est un couple valeur-vecteur propre de la matrice $P(A)$

Exercice 7

Si -1 et 2 sont les valeurs propres de A une matrice carrée d'ordre 2 quelles sont les valeurs propres de A^2 ?

Exercice 9

Prouver que A une matrice carrée d'ordre n est singulière ($\det(A) = 0$) $\iff$ 0 est une valeur propre de A

Exercice 10

Si A n'est pas une matrice singulière on a vu ci-dessus que 0 ne peut pas être une valeur propre de A

Prouver alors que si λ est une valeur propre de A alors $\dfrac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^{-1}

Exercice 11

1. Soit A une matrice stochastique d'ordre n suivant les lignes.

   Montrer que $(1, V)$ est un couple valeur-vecteur propre de A (avec $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ .. \\ 1 \end{pmatrix}$)

Exercice 12

Soit A une matrice carrée d'ordre n idempotente (i.e $A^2 = A$).

Montrer que les seules valeurs propres possibles pour une matrice idempotente sont 0 ou 1

Exercice 13

Une matrice carrée d'ordre n, A est dite nilpotente, s'il existe un entier $p \geqslant 2$ tel que $A^p = (0)$

1. Montrer que la seule valeur propre possible pour une matrice nilpotente, est 0
2. Donner un exemple de matrice nilpotente

Exercice 14

On rappelle que la matrice d'une rotation plane de centre l'origine du repère O et d'angle θ est :

$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Discuter en fonction de θ de l'existence de valeurs propres pour M_θ. Etait ce prévisible d'un point de vue géométrique ?

Exercice 15

Trois vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, et $\overrightarrow{u_3}$ de l'espace sont **coplanaires** si le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, et $\overrightarrow{u_3}$ c'est à dire il existe λ_i pour $1 \leqslant i \leqslant 4$ **non tous nuls** tel que :

$$\sum_{i=1}^{i=3} \lambda_i \overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{0}$$

1. Donner dans le cube $ABCDEFGH$ trois vecteurs coplanaires (justifier)
2. Il s'agit maintenant d'étendre la définition du déterminant aux matrices carrées d'ordre 3 de telle sorte que si trois vecteurs coplanaires C_1, C_2 et C_3 sont coplanaires alors le déterminant de la matrice $(C_1\ C_2\ C_3)$ est nul

On va définir le déterminant d'une matrice carrée **par récurrence** ainsi :

(a) Si A est une matrice carrée d'ordre $n = 1$ alors A est un nombre réel et $\det(A) = \mathrm{A}$

(b) Si A est une matrice carrée d'ordre $n \geqslant 2$ on définit A_{ij} la sous-matrice de A obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j alors A_{ij} est une matrice carrée d'ordre $n-1$ et $\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$

3. Vérifier que cette définition redonne la définition du déterminant pour une matrice carrée d'ordre 2
4. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Vérifier que les vecteurs colonnes M_1 et M_2 ne sont pas colinéaires et les vecteurs M_1, M_2 et M_3 sont coplanaires (car $M_3 = 2M_2 - M_1$)
5. Vérifier que $\det(M) = 0$
6. Prouver que si $\det(M) = 0$ où M est une matrice carrée d'ordre 3 quelconque alors les vecteurs colonnes de M sont coplanaires

Exercice 16

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré n, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_k \in \mathbb{R}$

1. En admettant le théorème de D'Alembert Gauss qui assure que tout polynôme de degré n à coefficients réels a n racines complexes , prouver que si a est racine de P alors $\overline{a}$, le conjugué de a aussi
2. En déduire que tout polynôme de degré **impair** à coefficients réels a au moins une racine réelle

Exercice 17

1. Donner un exemple de matrice carrée d'ordre 2 n'ayant pas de valeur propre réelle
2. Montrer que toute matrice carrée d'ordre 3 a au moins une valeur propre réelle
3. Comment définir la matrice carrée d'une rotation dans l'espace ?

Exercice 18

Calculer les valeurs propres (si elles existent) des matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

Exercice 19

Chercher des vecteurs propres des matrices ci-dessus lorsque c'est possible

Exercice 20

1. Calculer le polynôme caractéristique p_B de la matrice diagonale B de l'exercice 18

2. Vérifier que $p_B(B) = (0)$

Exercice 21

On rappelle que deux matrices carrées M et N sont semblables s'il existe une matrice carrée inversible S tel que $M = S^{-1}NS$

On dit qu'une relation R entre deux objets mathématiques x et y est une **relation d'équivalence sur l'ensemble des objets E du même type** que x et y si :

1. $\forall x \in E\ xRx$ (relation réflexive)
2. $\forall x \in E,\ \forall y \in E$ si xRy alors yRx (relation symétrique)
3. $\forall x \in E,\ \forall y \in E\ \forall z \in E$ si xRy et yRz alors xRz (relation transitive)

1. Montrer que toute relation de congruence sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$
2. Montrer que toute relation de similitude sur l'ensemble des matrices carrées d'ordre n est une relation d'équivalence
3. Montrer qu'une relation d'équivalence R sur un ensemble E engendre une partition de E

Exercice 22

1. Montrer que si deux matrices carrées d'ordre 3 M et N sont semblables alors $\det(M) = \det(N)$
2. Montrer que si deux matrices carrées d'ordre 3 M et N sont semblables alors $p_M = p_N$
3. Montrer que la seule matrice carrée d'ordre 2 semblable à la matrice nulle (0) est la matrice nulle
4. Montrer que la matrice identité est semblable avec elle-même
5. Montrer que la matrice nulle est semblable avec elle-même
6. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice nulle (0) ont la même valeur propre 0 de multiplicité 2. Sont elles semblables ?

Exercice 23

Une matrice carrée M est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. On a vu en cours une condition suffisante (mais non nécéssaire) :

Si une matrice carrée d'ordre n a n valeurs propres réelles distinctes alors elle est diagonalisable

1. Montrer que toute matrice carrée d'ordre 2 stochastique est diagonalisable
2. Donner un exemple de matrice carrée d'ordre 2 diagonalisable ayant une valeur propre de multiplicité 2

Exercice 24 (BAC Amérique du Nord juin 2016) On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.

On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du n-ième tirage.

1. (a) Traduire par une phrase la probabilité $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)$ puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)\,,\, P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) \text{ et } P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)\,.$$

   (b) Exprimer $P(X_{n+1}=1)$ en fonction de $P(X_n=0)\,,\,P(X_n=1)$ et $P(X_n=2)$.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n la matrice ligne définie par :

$$R_n = \begin{pmatrix} P(X_n=0) & P(X_n=1) & P(X_n=2) \end{pmatrix}$$

   et on considère M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   On note R_0 la matrice ligne $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   On admettra par la suite que, pour tout entier naturel n, $R_{n+1} = R_n \times M$.
   Déterminer R_1 et justifier que, pour tout entier naturel n, $R_n = R_0 \times M^n$.
3. On admet que $M = P \times D \times P^{-1}$ avec :

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Etablir que, pour tout entier naturel n, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$.
   On admettra que, pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. (a) Calculer $D^n \times P^{-1}$ en fonction de n.
   (b) Sachant que $R_0P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, déterminer les coefficients de R_n en fonction de n.
5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=0)\,,\ \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=1)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=2)$.
   Interpréter ces résultats.

Exercice 25 (Bac Polynésie juin 2016) *Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.*
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1**
   Pour tout entier naturel n, le chiffre des unités de $n^2 + n$ n'est jamais égal à 4.
2. On considère la suite (u_n) définie, pour $n \geqslant 1$, par
   $$u_n = \frac{1}{n}\text{pgcd}(20\ ;\ n).$$
   Proposition 2
   La suite (u_n) est convergente.
3. **Proposition 3**
   Pour toutes matrices A et B carrées de dimension 2, on a $A \times B = B \times A$.
4. Un mobile peut occuper deux positions A et B. A chaque étape, il peut soit rester dans la position dans laquelle il se trouve, soit en changer.
   Pour tout entier naturel n, on note :
   — A_n l'évènement « le mobile se trouve dans la position A à l' étape n » et a_n sa probabilité.
   — B_n l'évènement « le mobile se trouve dans la position B à l'étape n » et b_n sa probabilité.
   — X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
   On admet que, pour tout entier nature n, $X_{n+1} = M \times X_n$ avec $M = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,3 \\ 0,45 & 0,7 \end{pmatrix}$.
   Proposition 4
   La probabilité $P_{A_n}(B_{n+1})$ vaut 0,45.
   Proposition 5
   Il existe un état initial $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ tel que la probabilité d'être en B à l'étape 1 est trois fois plus grande que celle d'être en A à l'étape 1, autrement dit tel que $b_1 = 3a_1$.

Exercice 26 (BAC Amérique du Sud Novembre 2017)

Dans un jeu vidéo en ligne, les joueurs peuvent décider de rejoindre l'équipe A (statut noté A) ou l' équipe B (statut noté B) ou bien de n'en rejoindre aucune et rester ainsi solitaire (statut noté S). Chaque jour, chaque joueur peut changer de statut mais ne peut pas se retirer du jeu.

Les données recueillies sur les premières semaines après le lancement du jeu ont permis de dégager les tendances suivantes :

- un joueur de l'équipe A y reste le jour suivant avec une probabilité de $0,6$; il devient joueur solitaire avec une probabilité de $0,25$. Sinon, il rejoint l'équipe B ;
- un joueur de l'équipe B y reste le jour suivant avec une probabilité de $0,6$; sinon, il devient joueur solitaire avec une probabilité identique à celle de rejoindre l'équipe A ;
- un joueur solitaire garde ce statut le jour suivant avec une probabilité de $\frac{1}{7}$; il rejoint l'équipe B avec une probabilité 3 fois plus élevée que celle de rejoindre l'équipe A.

Au début du jeu, à la clôture des inscriptions, tous les joueurs sont solitaires.

On note $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & s_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste des statuts d'un joueur au bout de n jours. Ainsi a_n est la probabilité d'être dans l'équipe A, b_n celle d'être dans l'équipe B et s_n celle d'être un joueur solitaire, après n jours de jeu.

On a donc : $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ et $s_0 = 1$.

1. On note p la probabilité qu'un joueur solitaire un jour donné passe dans l'équipe A le jour suivant. Justifier que $p = \dfrac{3}{14}$.
2. (a) Recopier et compléter le graphe probabiliste ci-contre représentant la situation.

   (b) On admet que la matrice de transition est $T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$.

   Pour tout entier naturel n, on a donc $U_{n+1} = U_n T$.
   Montrer alors que, pour tout entier naturel n, on a $U_n = U_0 T^n$.

   (c) Déterminer l'état probabiliste au bout d'une semaine, en arrondissant au millième.
3. On pose $V = \begin{pmatrix} 300 & 405 & 182 \end{pmatrix}$.

   (a) Donner, sans détailler les calculs, le produit matriciel VT. Que constate-t-on ?

   (b) En déduire un état probabiliste qui reste stable d'un jour sur l'autre.
4. On donne l'algorithme suivant, où la commande « $U[i]$ » renvoie le coefficient de la i-ème colonne d'une matrice ligne U.

Variables	k un entier naturel U une matrice de taille 1×3 T une matrice carrée d'ordre 3
Traitement	$U \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $T \leftarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$ Pour k allant de 1 à 7 $U \leftarrow UT$ Fin Pour
Sortie	Afficher $U[1]$

   (a) Quelle est la valeur numérique arrondie au millième de la sortie de cet algorithme ? L'interpréter dans le contexte de l'exercice.

   (b) Recopier et modifier cet algorithme pour qu'il affiche la fréquence de joueurs solitaires au bout de 13 jours.

Exercice 27 (BAC Métropole 2017)

On appelle « triangle rectangle presque isocèle », en abrégé TRPI, un triangle rectangle dont les cotés de l'angle droit ont pour longueurs x et $x+1$, et dont l 'hypoténuse a pour longueur y, où x et y sont des entiers naturels.

Ainsi, un TRPI est un triangle rectangle dont les longueurs des cotés de l'angle droit sont deux nombres entiers consécutifs et dont la longueur de l'hypoténuse est un nombre entier.
Si le triangle de cotés x, $x+1$ et y, où y est la longueur de l'hypoténuse, est un TRPI, on dira que le couple $(x\ ;\ y)$ définit un TRPI.

Partie A

1. Démontrer que le couple d'entiers naturels $(x\ ;\ y)$ définit un TRPI si, et seulement si, on a :

$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

2. Montrer que le TRPI ayant les plus petits cotés non nuls est défini par le couple $(3\,;5)$.
3. (a) Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est impair alors n est impair.
   (b) Montrer que dans un couple d'entiers $(x\ ;\ y)$ définissant un TRPI, le nombre y est nécessairement impair.
4. Montrer que si le couple d'entiers naturels $(x\ ;\ y)$ définit un TRPI, alors x et y sont premiers entre eux.

Partie B

On note A la matrice carrée : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, et B la matrice colonne : $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Soient x et y deux entiers naturels ; on définit les entiers naturels x' et y' par la relation :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B.$$

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
   (a) Montrer que : $y'^2 - 2x'(x'+1) = y^2 - 2x(x+1)$.
   (b) En déduire que si le couple $(x\ ;\ y)$ définit un TRPI, alors le couple $(x'\ ;\ y')$ définit également un TRPI.

2. On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels, définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 5$ et pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + B$.

   Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\ ;\ y_n)$ définit un TRPI.

3. Déterminer, par la méthode de votre choix que vous préciserez, un TRPI dont les longueurs des côtés sont supérieures à 2017.