Exercice 1

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,$D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$

Parmi les opérations suivantes effectuer celles qu'il est possible d'effectuer :

$A + B$, $A + C$, $C + D$, $2A - B$,AC, CA, AD, DA

Exercice 2

Calculer AB où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en faisant une **combinaison linéaire de colonnes**

Exercice 3

Calculer BA où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ en faisant une **combinaison linéaire de lignes**

Exercice 4

On peut regarder l'algorithme d'Euclide étendu d'un point de vue matriciel où il s'agit de répéter la fonction suivante :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -(a//b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

où $a//b$ donne le quotient de la division euclidienne de a par b

1. Vérifier que cette fonction retourne le pgcd comme une combinaison linéaire des nombres avec le cas particulier $a = 70$ et $b = 42$
2. Pourquoi ça marche ?
3. Expliquer pourquoi l'algorithme d'Euclide étendu permet de résoudre des équations du type $42x \equiv 10$ [70]
4. Résoudre dans $\mathbb{Z}$
   (a) $17x \equiv 10$ [50]
   (b) $35x \equiv 10$ [50]
   (c) $35x \equiv 11$ [50]

Exercice 5 Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que $AB \neq BA$
2. Vérifier que $A(BC) = (AB)C$
3. Calculer A^2, A^3, puis conjecturer A^n pour n entier. Prouver par récurrence

Exercice 6

Soit la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que pour tout vecteur colonne X on a $IX = X$ et pour tout vecteur ligne X on a $XI = X$
2. Vérifier que pour toute matrice carrée d'ordre 2 A on a $AI = IA = A$
3. I est appelée la matrice identité. Quelle est la matrice carrée identité d'ordre 3 ? d'ordre n ?

Exercice 7

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

Calculer AB, puis AC

Exercice 8

Soit H la transformation (homothétie) qui à tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe $X' = \begin{pmatrix} x' = 2x \\ y' = 2y \end{pmatrix}$

1. Géométriquement comment décrire cette transformation ?
2. On note H par abus d'écriture la matrice associée à H. Que vaut H ?
3. Soit H^{-1} la transformation inverse définit ainsi :
   si on applique H^{-1} à X' on retrouve X.
   Vérifier que du point de vue du calcul matriciel cela se traduit par
   $HH^{-1} = H^{-1}H = I$ où I est la matrice identité. On dit que H est une matrice **inversible**

Exercice 9

On cherche à définir la matrice d'une rotation R de centre O l'origine d'un repère orthonormé du plan.

R la transformation (rotation) qui à tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe $X' = \begin{pmatrix} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{pmatrix}$ où X'

1. Du cours sur les nombres complexes on sait que multiplier tout nombre complexe $z = x + iy$ par un nombre complexe de module 1 de la forme $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ revient à "faire tourner" z autour de O de l'angle θ. Déterminer la matrice R
2. Application numérique : Que vaut R pour $\theta = \frac{\pi}{3}$?, $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$?
3. Que vaut R^{-1} ?
4. Vérifier que
   $RR^{-1} = R^{-1}R = I$ où I est la matrice identité

Exercice 10

Une matrice M est dite **idempotente** si $M^2 = I$ où I est la matrice identité

1. Vérifier que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est idempotente
2. Dans $\mathbb{R}^2$ on considère la transformation qui à tout (x, y) associe $(x', y') = S(x, y)$ tel que $x' = x$ et $y' = -y$. C'est la symétrie axiale d'axe l'axe des abscisses. Vérifier que $S(S(x, y)) = (x, y)$. On dit que S est idempotente

   Observer que la matrice précédente est associée à cette symétrie. En partant de cette observation construire d'autres matrices idempotentes d'ordre 2
3. Créer par analogie dans $\mathbb{R}^3$ une transformation idempotente puis une matrice idempotente et vérifier par calcul

Exercice 11

Soit le système linéaire de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

1. Résoudre ce système
2. Reformuler la résolution de ce système avec le point de vue du calcul matriciel, en notant A la matrice associée au système, X le vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et Y le vecteur $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
3. Soit M la matrice carrée $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

   on définit le déterminant de M par $\det M = a \times d - c \times b$

   On note M_1 et M_2 les vecteurs colonnes de M

   Que peut on dire au sujet des vecteurs colonnes de M si $\det M = 0$?
4. Pourquoi peut-on dire le système a au moins une solution si et seulement si $\det A \neq 0$? (Penser à la géométrie, à quel objet géométrique peut on associer les équations du système ?)
5. En regardant A comme une transformation qui envoie X sur $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, exprimer x et y **en fonction** de x' et y' permet d'inverser la transformation A.

   Faites le et donner A^{-1}. Dans quel cas nous aurions pas pu faire ce calcul ?
6. Vérifier que $AA^{-1} = I$, que $\det AA^{-1} = \det A \det A^{-1} = \det I = 1$.

   retrouver la solution trouvée en 1) en calculant $A^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
7. Traiter le cas général avec M en montrant que M inversible si et seulement si $\det M \neq 0$ et dans ce cas donner l'expression de M^{-1} en fonction de M et $\det M$ (**Remarque :** On verra plus loin un algorithme plus performant pour résoudre un système)

Exercice 12

Une matrice M est dite **nilpotente** s'il existe un entier n tel que $M^n = (0)$ où (0) est la matrice nulle

1. Vérifier que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est nilpotente
2. On cherche une matrice carrée d'ordre 3 M nilpotente telle que $M^2 = 0$. En tatônnant en trouver au moins une.

Exercice 13

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

1. Quelle particularité a cette matrice ?
2. Calculer A^2, A^3, conjecturer une formule pour A^n
3. Démontrer par récurrence

Exercice 14

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3
2. Montrer qu'on peut trouver trois réels x, y et z tels que

$$A^3 + xA^2 + yA + zI = (0)$$

3. En déduire que la matrice A est inversible et déterminer A^{-1}

Exercice 15(BAC JUIN 2013 France Métropolitaine (extrait)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer PQ et QP. En déduire la matrice P^{-1} en fonction de Q
2. Vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera
3. Démontrer que pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1 $A^n = PD^nP^{-1}$

Exercice 16

Soit (M_{ij}) une matrice de m lignes et n colonnes on définit la transposée de M ,notée M^T, par

$$(M^T)_{ij} = M_{ji}$$

1. Déterminer la transposée de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

2. Calculer AA^T et A^TA. Qu'observez vous ?
3. Prouver le cas général

Exercice 17

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée quelconque d'ordre 2. Constater que $M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$ échange les lignes de M
2. Constater que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$ échange les colonnes de M
3. Trouver toutes les matrices P carrées d'ordre 3 qui échangent les lignes ou les colonnes d'une matrice donnée, suivant que l'on multiplie P à la matrice donnée à droite ou à gauche
4. Combien de matrices ?
5. Opérations élémentaires sur les matrices

Exercice 18

Matrices U et L

Exercice 19

Matrice échelonnée (forme canonique d'une matrice)

Exercice 20 *Vrai ou Faux ?*

Pour toutes matrices carrées d'ordre 2, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Exercice 21 (Concours général Série ES 2017)

Étude d'une suite

Dans ce problème, on étudie la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Partie A

Dans cette partie, on considère l ?équation (E) $x^2 - x - 1 = 0$.

1. Résoudre (E)
2. On note α la solution strictement positive de (E).
   Montrer que la seconde solution, que l'on notera β, vérifie $\beta = 1 - \alpha = -\alpha$

Partie B

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$
   (a) Que vaut X_0 ?
   (b) Déterminer une matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de X_n en fonction de A_n et X_0
2. On note $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$. Montrer que $AC_1 = \alpha C_1$ et $AC_2 = \beta C_2$

3. Montrer que la matrice P ayant pour colonnes, dans cet ordre, C_1 et C_2, est inversible.
4. (a) Soit M et N des matrices carrées d ?ordre 2. On note $K1$ et $K2$ les colonnes de N. Justifier que la matrice MN a pour colonnes MK_1 et MK_2
   (b) À quoi est égale la matrice $P^{-1}P$? En déduire, sans utiliser l ?expression explicite de la matrice P^{-1} l ?expression des colonnes $P^{-1}C_1$ et $P^{-1}C_2$.
   (c) En déduire, à l ?aide du moins de calculs possible, l'expression de la matrice $P^{-1}AP$.
5. (a) Soit $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ .Donner l ?expression de D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$
   (b) En déduire l ?expression de A^n, puis de X_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Partie C

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_{n+1} - \alpha u_n$ et $w_n = u_{n+1} - \beta u_n$

1. Montrer, pour tout entier n, que $v_{n+1} = \beta v_n$
2. En déduire une expression de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Donner de même une expression de w_n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Partie D

1. Déduire des résultats de la partie B ou de la partie C une expression de u_n en fonction de n, α et β, pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
3. Quelle est la limite de la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$?

Exercice 22 Chiffrement de Hill (BAC 2016 Centres étrangers)

Le but de cet exercice est d'étudier, sur un exemple, une méthode de chiffrement publiée en 1929 par le mathématicien et cryptologue Lester Hill. Ce chiffrement repose sur la donnée d'une matrice A, connue uniquement de l'émetteur et du destinataire.

Dans tout l'exercice, on note A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$.

Partie A – Chiffrement de Hill

Voici les différentes étapes de chiffrement pour un mot comportant un nombre pair de lettres :

<table>
<tr><td>à l'étape 1</td><td>on divise le mot en blocs de deux lettres consécutives puis, pour chaque bloc, on effectue chacune des étapes suivantes.</td></tr>
<tr><td>à l'étape 2</td><td>On associe aux deux lettres du bloc les deux entiers x_1 et x_2 tous deux compris entre 0 et 25, qui correspondent aux deux lettres dans le même ordre, dans le tableau suivant :
<table>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td><td>G</td><td>H</td><td>I</td><td>J</td><td>K</td><td>L</td><td>M</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>N</td><td>O</td><td>P</td><td>Q</td><td>R</td><td>S</td><td>T</td><td>U</td><td>V</td><td>W</td><td>X</td><td>Y</td><td>Z</td></tr>
<tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>à l'étape3</td><td>On transforme la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vérifiant $Y = AX$.</td></tr>
<tr><td>à l'étape 4</td><td>On transforme la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 celui de la division euclidienne de y_2 par 26.</td></tr>
<tr><td>à l'étape 5</td><td>On associe aux entiers r_1 et r_2 les deux lettres correspondantes du tableau de l'étape 2.
Le bloc chiffré est le bloc obtenu en juxtaposant ces deux lettres.</td></tr>
</table>

Question : utiliser la méthode de chiffrement exposée pour chiffrer le mot « HILL ».

Partie B - Quelques outils mathématiques nécessaires au déchiffrement

1. Soit a un entier relatif premier avec 26.
   Démontrer qu'il existe un entier relatif u tel que $u \times a \equiv 1$ modulo 26.
2. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	a, u, et r sont des nombres (a est naturel et premier avec 26)

TRAITEMENT :	Lire a
	u prend la valeur 0, et r prend la valeur 0
	Tant que $r \neq 1$
	    u prend la valeur $u + 1$
	    r prend la valeur du reste de la division euclidienne de $u \times a$ par 26
	Fin du Tant que

SORTIE	Afficher u

On entre la valeur $a = 21$ dans cet algorithme.

(a) Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

u	0	1	2	...
r	0	21	...	...

(b) En déduire que $5 \times 21 \equiv 1$ modulo 26.

3. On rappelle que A est la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$ et on note I la matrice : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer la matrice $12A - A^2$.
   (b) En déduire la matrice B telle que $BA = 21I$.
   (c) Démontrer que si $AX = Y$, alors $21X = BY$.

Partie C - Déchiffrement

On veut déchiffrer le mot VLUP.

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ la matrice associée, selon le tableau de correspondance, Ã un bloc de deux lettres avant chiffrement, et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ la matrice définie par l'égalité : $Y = AX = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} X$.

Si r_1 et r_2 sont les restes respectifs de y_1 et y_2 dans la division euclidienne par 26, le bloc de deux lettres après chiffrement est associé à la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que : $\left\{ \begin{array}{rcr} 21x_1 & = & 7y_1 - 2y_2 \\ 21x_2 & = & -7y_1 + 5y_2 \end{array} \right.$
2. En utilisant la question B .2., établir que : $\left\{ \begin{array}{rcll} x_1 & \equiv & 9r_1 + 16r_2 & \text{modulo } 26 \\ x_2 & \equiv & 17r_1 + 25r_2 & \text{modulo } 26 \end{array} \right.$
3. Déchiffrer le mot VLUP, associé aux matrices $\begin{pmatrix} 21 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.